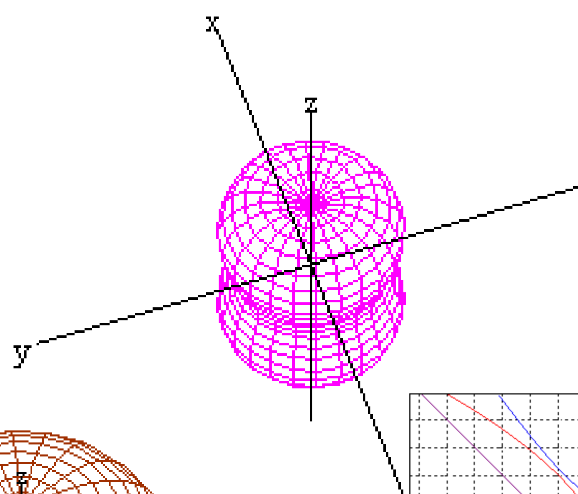
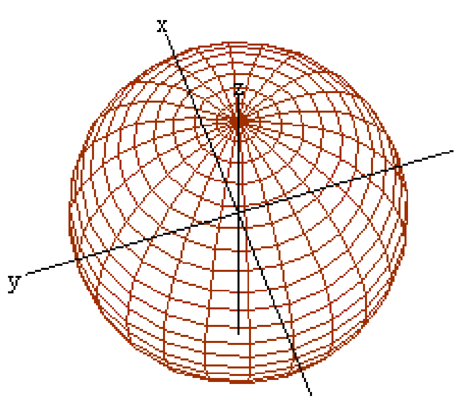
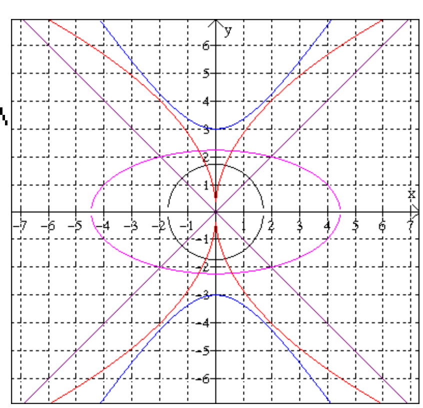
Matemáticas III

O R A M A S







Ubicación Curricular

COMPONENTE: FORMACIÓN BÁSICA	CAMPO DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICO

Esta asignatura se imparte en el tercer semestre, tiene como antecedente Matemáticas II, la asignatura consecuente es Matemáticas IV y se relaciona con Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidad y Estadística I y II, Ciencias Naturales, Sociales y Económico-Administrativas.

HORAS SEMANALES: 5	CRÉDITOS: 10

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

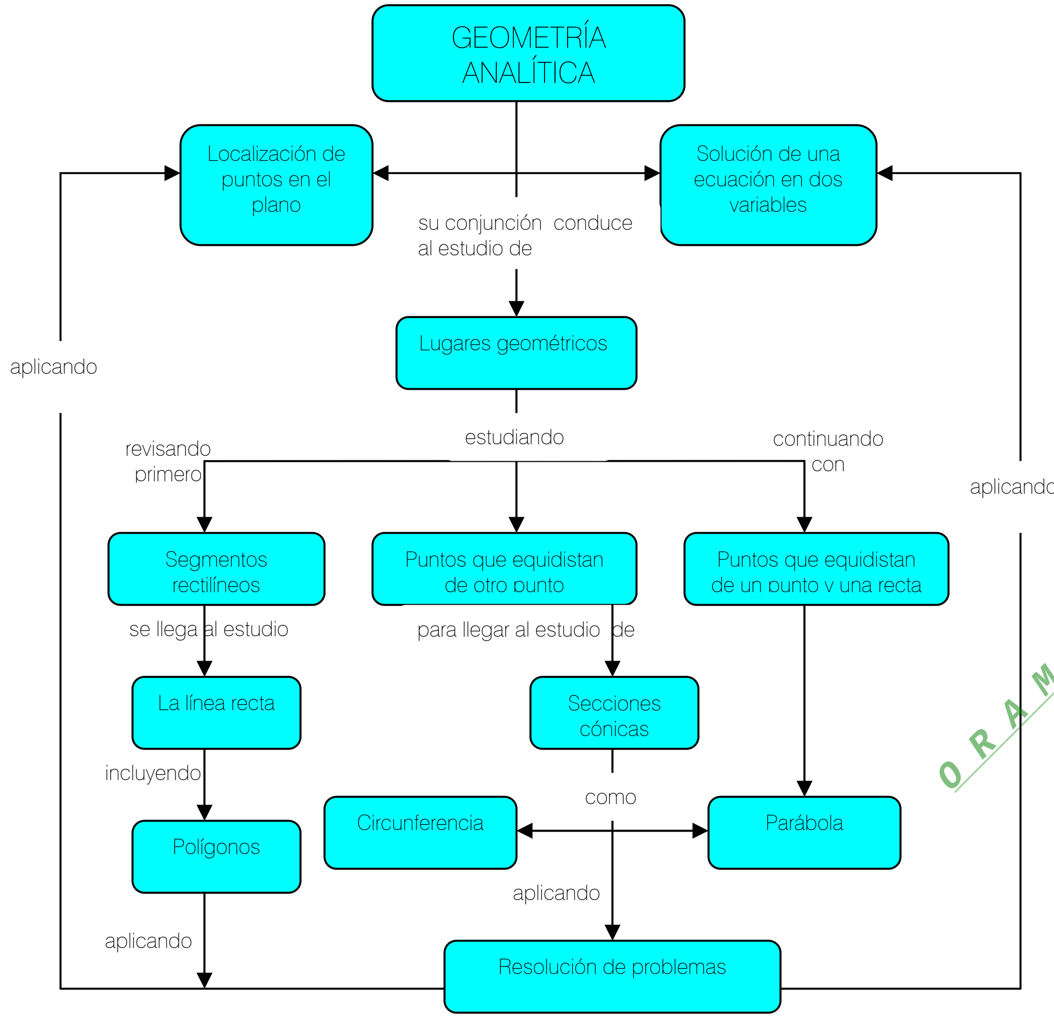
Plantel: ____

Grupo: __________ Turno: ___________ Teléfono: ____________

Domicilio: ____

____

Mapa Conceptual de la Asignatura



Índice

Índice *(cont')*

Recomendaciones para el alumno

El presente Módulo de Aprendizaje constituye un importante apoyo para ti, en él se manejan los contenidos mínimos de la asignatura Matemáticas III.

No debes perder de vista que el Modelo Académico del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora propone un aprendizaje activo, mediante la investigación, el análisis y la discusión, así como el aprovechamiento de materiales de lectura complementarios; de ahí la importancia de atender las siguientes recomendaciones:

- Maneja el Módulo de Aprendizaje como texto orientador de los contenidos temáticos a revisar en clase.
- Utiliza el Módulo de Aprendizaje como lectura previa a cada sesión de clase.
- Al término de cada unidad, resuelve la autoevaluación, consulta la escala de medición del aprendizaje y realiza las actividades que en ésta se indican.
- Realiza los ejercicios de reforzamiento del aprendizaje para estimular y/o reafirmar los conocimientos sobre los temas ahí tratados.
- Utiliza la bibliografía recomendada para apoyar los temas desarrollados en cada unidad.
- Para comprender algunos términos o conceptos nuevos, consulta el glosario que aparece al final del módulo.
- Para el Colegio de Bachilleres es importante tu opinión sobre los módulos de aprendizaje. Si quieres hacer llegar tus comentarios, utiliza el portal del colegio: www.cobachsonora.edu.mx

Presentación

La asignatura de ***Matemáticas 3*** te introduce al estudio de la Geometría Analítica. Su importancia radica, en que esta rama de las matemáticas posibilita analizar problemas geométricos desde un punto de vista algebraico y viceversa. Para ello es necesario manipular, esencialmente, el tránsito de una gráfica a una ecuación y de una ecuación a su gráfica primeramente con un contexto definido, es decir, su aplicación en el mundo real, que pueda proporcionar el significado de gráficas y ecuaciones y posteriormente la descontextualización. El uso de los sistemas coordenados, nos permite hacer éstos intercambios entre las representaciones geométricas y algebraicas.

El enfoque metodológico del curso está inmerso en el modelo educativo centrado en el aprendizaje, que privilegia la actividad permanente y sistemática del estudiante para guiar la acción pedagógica con un sentido orientador y facilitador del aprendizaje.

Esta materia trata los siguientes temas: *Sistemas de ejes coordenados,* el cuál proporciona los elementos necesarios para el análisis de coordenadas, para el cálculo de pendientes, distancias, áreas y ángulos de figuras geométricas. *La línea recta,* se analizan sus propiedades, ecuaciones y gráficas. *La circunferencia,* características geométricas y sus ecuaciones. *Las secciones cónicas,* generadas a partir de los cortes de un plano en conos, obteniéndose la circunferencia, elipse, hipérbola y *La parábola,* de la cual se analizan sus propiedades, ecuaciones y aplicaciones.

El orden y la profundidad de los temas considerados para el contenido de ésta asignatura, puede variar de acuerdo a la orientación de cada academia.

RIEMS

Introducción

El Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, en atención a los programas de estudio emitidos por la Dirección General de Bachillerato (DGB), ha venido realizando la elaboración del material didáctico de apoyo para nuestros estudiantes, con el fin de establecer en ellos los contenidos académicos a desarrollar día a día en aula, así como el enfoque educativo de nuestra Institución.

Es por ello, que actualmente, se cuenta con los módulos y guías de aprendizaje para todos los semestres, basados en los contenidos establecidos en la Reforma Curricular 2005. Sin embargo, de acuerdo a la reciente Reforma Integral de Educación Media Superior, la cual establece un enfoque educativo basado en competencias, es necesario conocer los fines de esta reforma, la cual se dirige a la totalidad del sistema educativo, pero orienta sus esfuerzos a los perfiles del alumno y profesor, siendo entonces el camino a seguir el desarrollo de las competencias listadas a continuación y aunque éstas deberán promoverse en todos los semestres, de manera más precisa entrará a partir de Agosto 2009, en el primer semestre.

Competencias Genéricas

CATEGORIAS	COMPETENCIAS GENÉRICAS
I. Se autodetermina y cuida de sí.	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
	3. Elige y practica estilos de vida saludables.
II. Se expresa y comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
III. Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
IV. Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
V. Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
VI. Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
	10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
	11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias Disciplinares Básicas

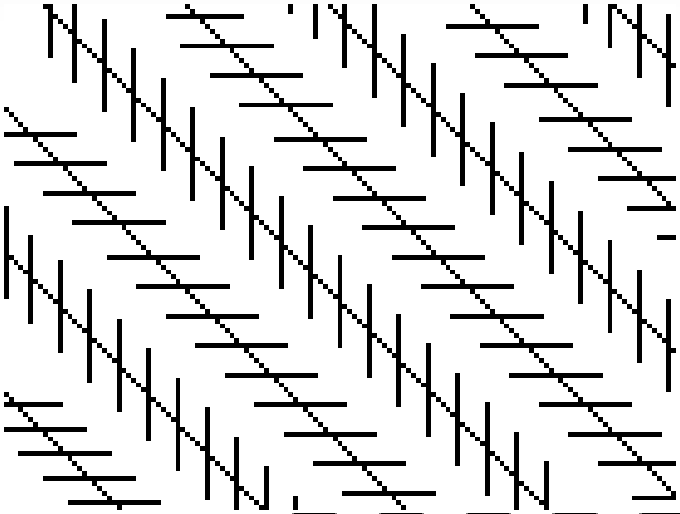
Matemáticas

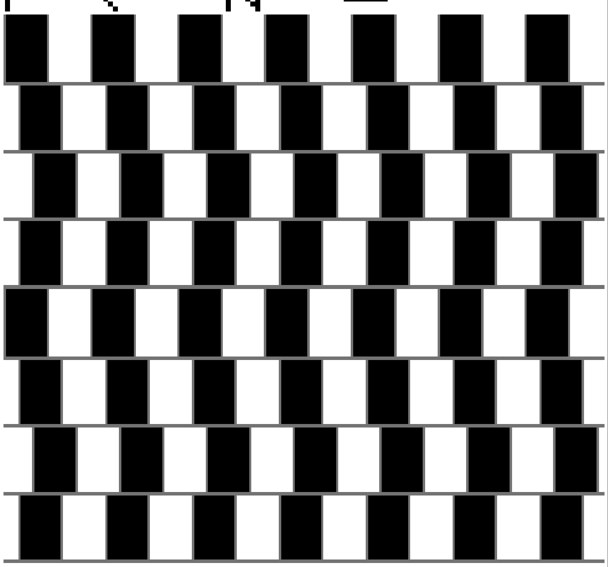
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Competencias docentes:

1. Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.
2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
7. Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
8. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Unidad 1
Sistema de ejes coordenados





Uno de los avances más importantes en la historia de las Matemáticas, fue la aportación de René Descartes, quién apoyado en los hombros de otros grandes personajes de la historia, como Euclides, Diofanto, Apolonio de Perga, Francois Vieta, etc. dio el paso decisivo para vincular la geometría con el álgebra y su representación en un plano cartesiano, lo que permitió llegar a la abstracción de conceptos que anteriormente estaban anclados a lo concreto. Ésto fue el detonante de grandes avances y descubrimientos en la mayoría de las ciencias.

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas teóricos o prácticos del sistema de ejes coordenados, mediante la investigación de gráficas en los que se representen coordenadas cartesianas de un punto y lugares geométricos que abarquen situaciones prácticas de su entorno físico, para familiarizarse con la traducción del lenguaje gráfico al lenguaje verbal; asociando la aplicación de los conceptos básicos sobre rectas, segmentos y polígonos, en la construcción de modelos matemáticos que faciliten el planteamiento de la situación; contribuyendo a favorecer un ambiente escolar colaborativo y responsable.

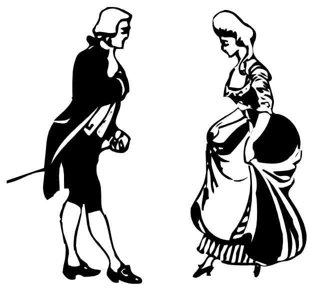
Temario:

1.1. Coordenadas cartesianas de un punto.
- 1.1.1 Ejes coordenados.
- 1.1.2 Lugares geométricos.

1.2. Conceptos básicos sobre rectas, segmentos y polígonos.
- 1.2.1. Segmentos rectilíneos.
- 1.2.2. Rectas.
- 1.2.3. Polígonos: áreas y perímetros.

1.1. COORDENADAS CARTESIANAS DE UN PUNTO

1.1.1. Ejes coordenados.

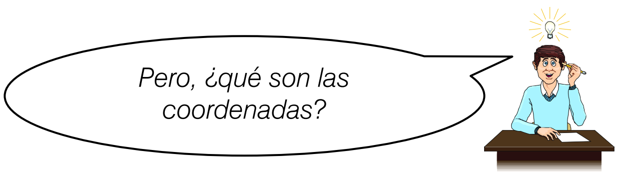


Álgebra Geometría

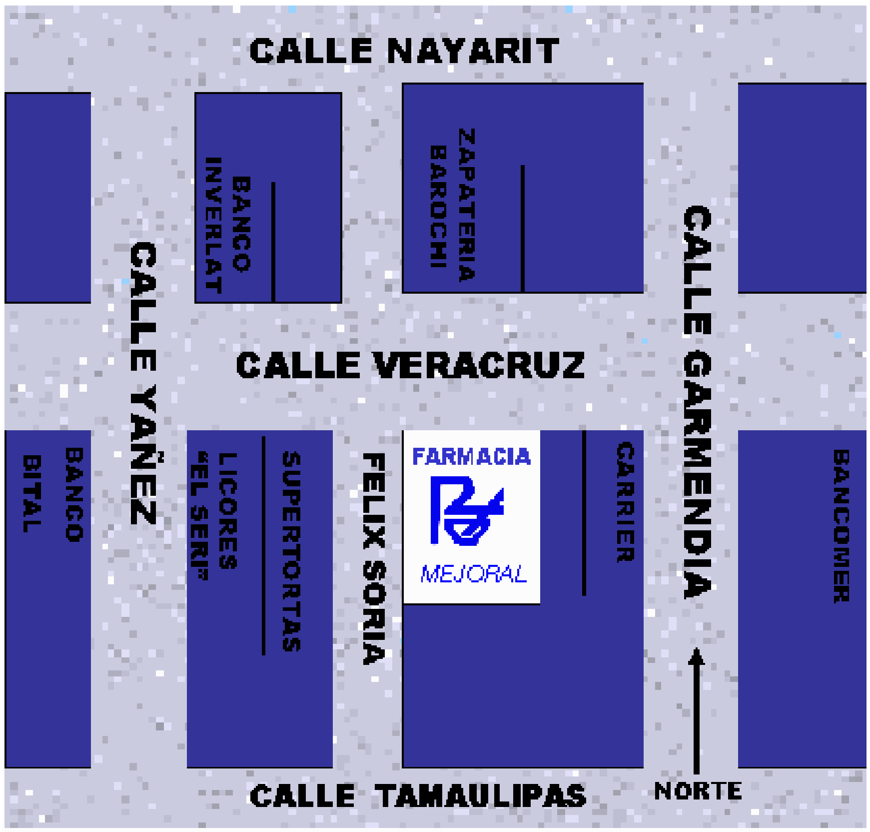
> *"Mientras el álgebra y la geometría toman caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad, y de ahí en adelante marcharon con ritmo rápido hacia la perfección."*
>
> *Joseph – Louis Lagrange*

La geometría fue una aportación de la cultura griega para la humanidad. Por otra parte, tenemos el álgebra como la principal aportación de la cultura árabe; la primera de ellas, avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media, en la primera mitad del siglo XVII; es con René Descartes, en su tratado "El Discurso del Método" publicado en 1637, que se logró un paso importante en esta ciencia; hizo época. En este trabajo se presenta una unión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una en la otra, dando de esta forma el fundamento de la geometría analítica, en la que se representan figuras, pero utilizando expresiones algebraicas.

Si quisiéramos establecer una definición sobre la Geometría Analítica, diríamos que es la rama de la geometría en la que las figuras (líneas rectas, curvas y figuras geométricas) se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas, para ello se utilizan un conjunto de ejes y coordenadas.

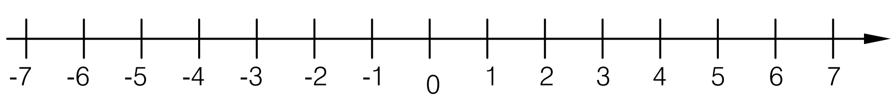


En la vida actual, es muy común que utilicemos las direcciones para dar con un lugar en especial, pues bien, cuando hacemos esto estamos estableciendo una coordenada (ubicación), para ello tenemos como referencia los nombres de las calles y el número de la dirección; en Matemáticas también establecemos una referencia que nos indica la posición que tiene una figura dentro de un contexto.

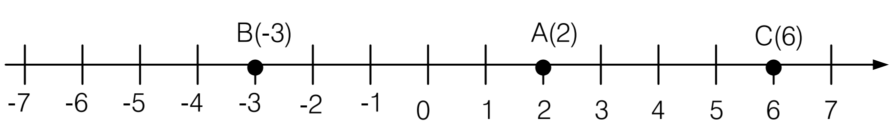


En el plano anterior, si nos pidieran localizar la dirección de la Farmacia Mejoral, por la calle Veracruz entre Félix Soria y Calle Garmendia, contaríamos como referencia con los nombres de las calles para localizarla, y no tendríamos problema alguno para ubicarla. En términos generales sería sumamente fácil dar con esta dirección, de esta manera se obtendrían unas coordenadas.

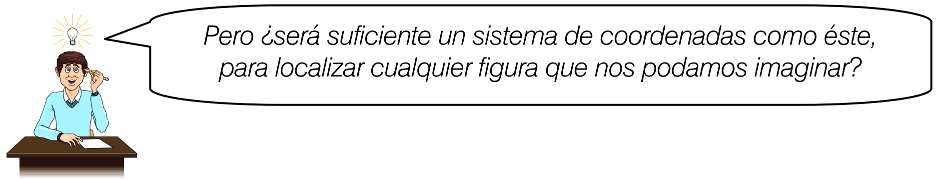
Los sistemas de coordenadas, son precisamente el parámetro que nos dará la referencia para la localización de puntos o figuras, el primer sistema de coordenadas que se utilizó fue el sistema de coordenadas lineal, que en su forma más simple contiene una recta que se dividió en varios segmentos, iguales, a los cuales se les asignó un valor numérico, como a continuación se señala:



Para señalar un punto dentro del sistema de coordenadas lineal, basta con marcar el punto en el lugar deseado y posteriormente indicar su posición con una letra (generalmente mayúscula), acompañada de un número que nos indica la posición que tiene dentro del sistema de coordenadas.

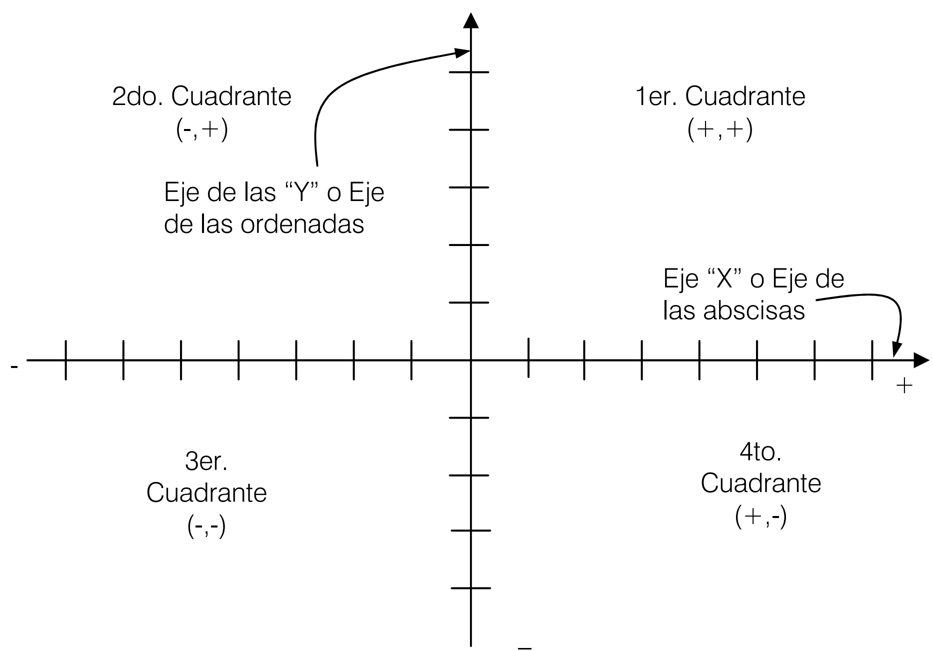


En este sistema de coordenadas tenemos señalados algunos puntos con sus coordenadas para que veamos cómo se localizan y señalan cada uno de ellos, sin ningún problema.



Al responder diríamos seguramente NO, ya que sólo pueden localizarse figuras con formas de línea recta o puntos, pero otro tipo de figura no es posible hacerlo, pues no se apreciarían con claridad.

Como el sistema de coordenadas lineal no es suficiente, se presentó el sistema de coordenadas rectangulares, también conocido como plano cartesiano, que consiste en trazar dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, haciendo coincidir el punto de corte con el cero común, obtenemos un sistema de ejes coordenados rectangular donde se forman cuatro regiones, que llamaremos cuadrantes y, para identificarlos, los vamos a enumerar del 1ro. al 4to. cuadrante.

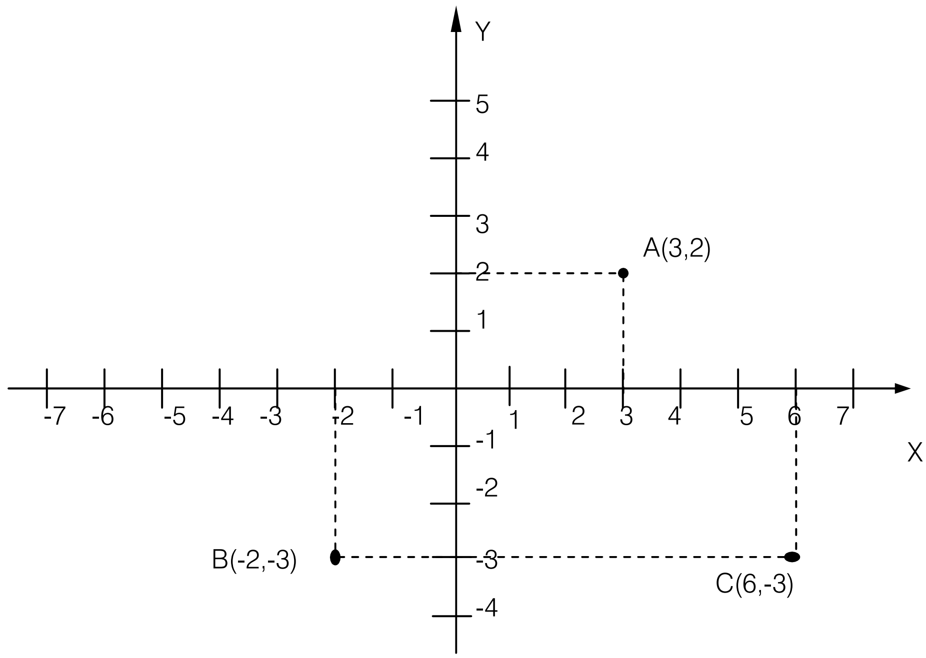


A los segmentos de rectas les llamaremos ejes coordenados, para identificarlos mejor, al eje horizontal le llamaremos eje X o eje de las abscisas; al eje vertical le llamaremos eje de las Y o eje de las ordenadas.

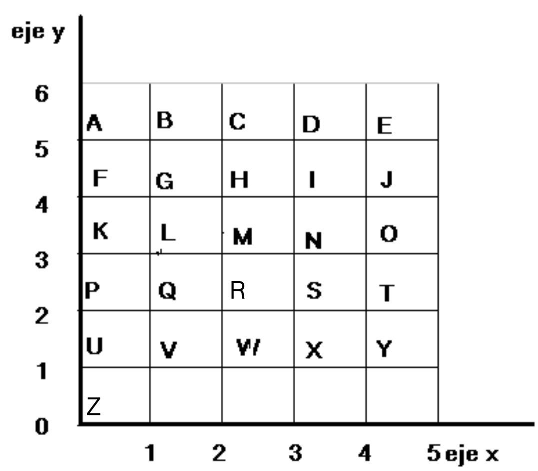
Los ejes coordenados los vamos a dividir en pequeños segmentos, de manera similar a la recta numérica, como lo indica la figura anterior.

Ubicación de un Punto por sus Coordenadas

Ahora bien, para localizar un punto en el sistema de coordenadas rectangulares procedemos de manera similar a como lo hicimos en la recta numérica, pero en este caso vamos a hacerlo con ambos ejes, y para nombrar a un punto, lo haremos utilizando un par ordenado de números que nos van a indicar cuál es la posición que tiene con respecto a los ejes coordenados.



Además del sistema de coordenadas rectangulares existen también otros tipos de sistemas de coordenadas como son: las polares, las geográficas y las no rectangulares, varios puntos para recordar plenamente cómo se hace.



EJERCICIO 1

1. Escribe un par ordenado de números para indicar las letras del alfabeto; basándote en el ejemplo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
(0,5)												

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Z

2. Usa los pares ordenados de números para formar las siguientes palabras
a) Fiesta
b) Primavera
c) Vacaciones
d) Matemáticas
e) Música

3. Descifra las siguientes palabras generadas por los siguientes pares de números.
1) (1, 2), (3, 3), (1, 4), (2, 1), (4,2)
2) (2, 2), (4,4), (3,1), (0, 4)
3) (1, 3), (3, 3), (3, 1)
4) (0, 0), (1, 0), (0, 4)
5) (0, 1), (1, 2), (0, 0), (2, 2), (0, 4)

4. Encuentra las figuras que se generan al unir los puntos siguientes en el plano y elabora la gráfica:
1) (-2, -3), (-1, 0), (0, 3), (1, 6), (2,9).
2) (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2,4).

TAREA 1

Página 47.

5. Una persona parte del origen y camina 3 Km. hacia el Oeste, se detiene y camina 5 Km. hacia el Norte, enseguida 7 Km. hacia el Este y finalmente, 8 Km hacia el Sur. Escribe las coordenadas del punto final de su recorrido. ¿Podrías decir a qué distancia se encuentra del origen?

1.1.2. Lugares geométricos.

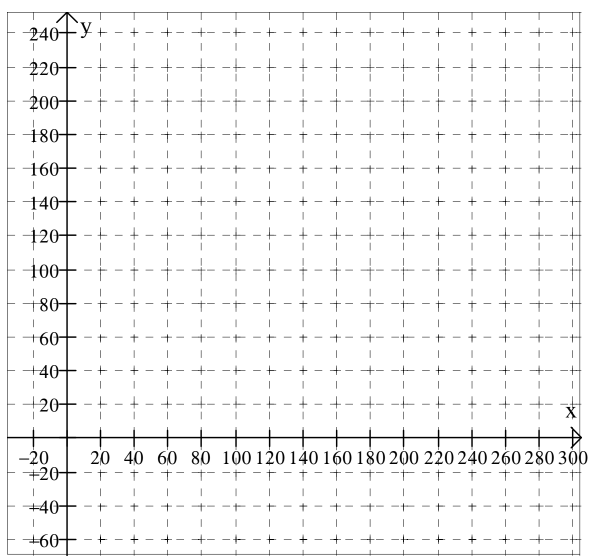
Los puntos que graficaste y localizaste anteriormente son puntos escogidos al azar. Ahora veamos una situación de conversión de temperaturas de diferentes escalas, donde observarás los puntos graficados. Para convertir grados Centígrados a grados Fahrenheit se utiliza la fórmula:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

EJERCICIO 2

Completa la tabla y grafica los puntos obtenidos.

C (x)	F (y)
0	32
10	
20	
	86
40	
50	
	140
70	
80	
	194
100	



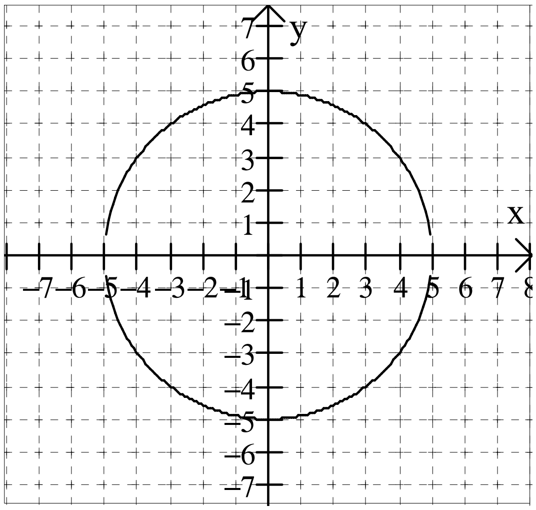
Si observas la gráfica, estos puntos siguen un comportamiento lineal generado por una condición dada por la ecuación.

¿Qué es un lugar geométrico?

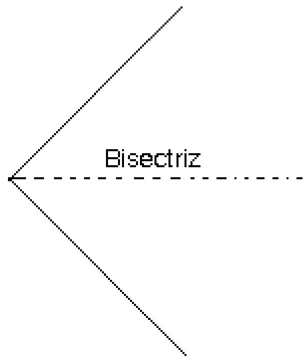
Es el punto o conjunto de puntos para los que se cumplen las mismas propiedades geométricas y que se puede expresar en forma verbal, en forma de una ecuación, en forma gráfica o de una tabla de valores.

Por ejemplo:

Una circunferencia es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano, de tal manera que se conserva a la misma distancia de un punto fijo llamado centro, cuya ecuación puede ser $x^2 + y^2 = 25$, y su gráfica es:



La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de un punto que se mueve en una recta, de tal manera que se conserva a la misma distancia de los lados del ángulo como se muestra en el dibujo.



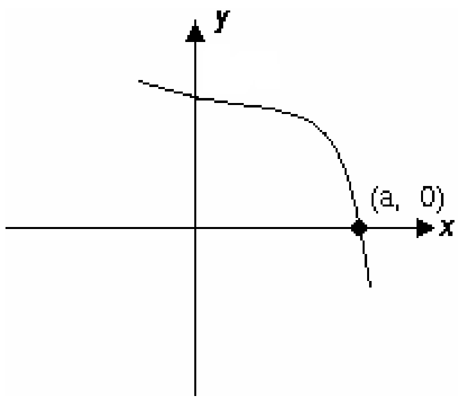
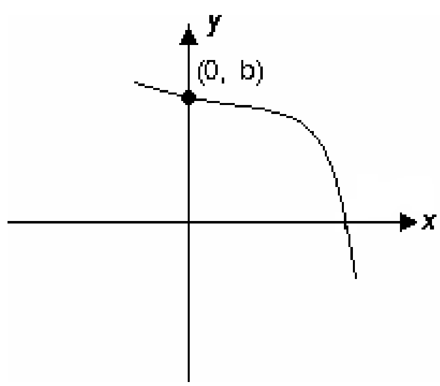
En el estudio de la Geometría Analítica se nos presentan dos problemas básicos, que son inversos entre sí:

Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico que representa, es decir, trazar la gráfica correspondiente.
Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

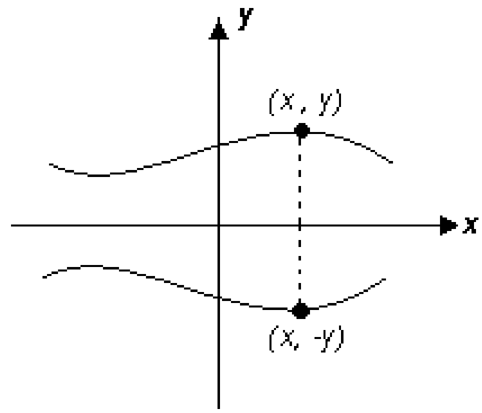
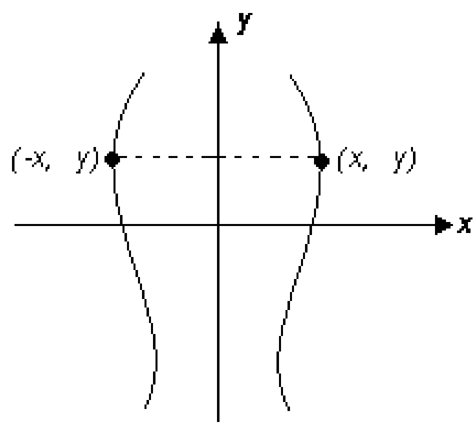
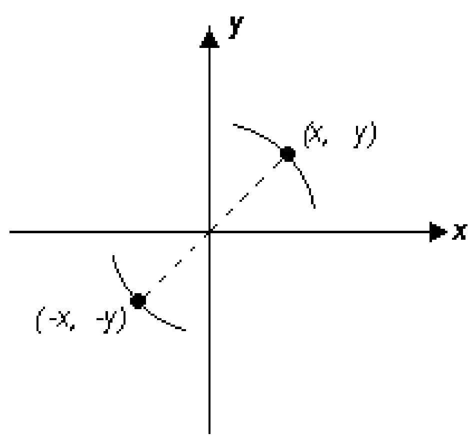
Al conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación o son soluciones de ésta se le llama gráfica de una ecuación.

Para **graficar una ecuación** se recomienda seguir los siguientes pasos:

Primero: Determinar las intersecciones con los ejes.

Intersección	Interpretación gráfica	Procedimiento
Con el eje *x*		Para determinar la intersección con el eje *x* hacemos *y = 0* y sustituimos en la ecuación obteniendo el valor de *x (a).*
Con el eje y		Para determinar la intersección con el eje y, hacemos x = 0 sustituimos en la ecuación obteniendo el valor de y (b).

Segundo: Buscar simetrías respecto al origen y a los ejes.

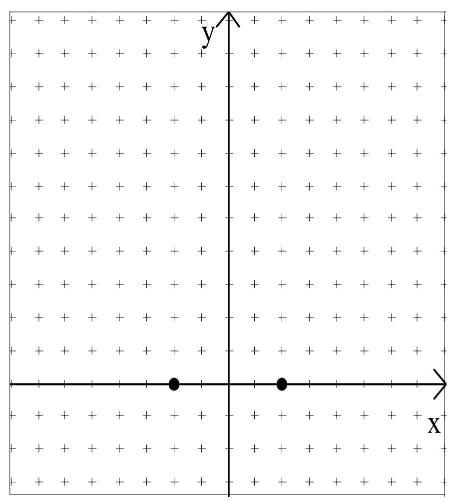
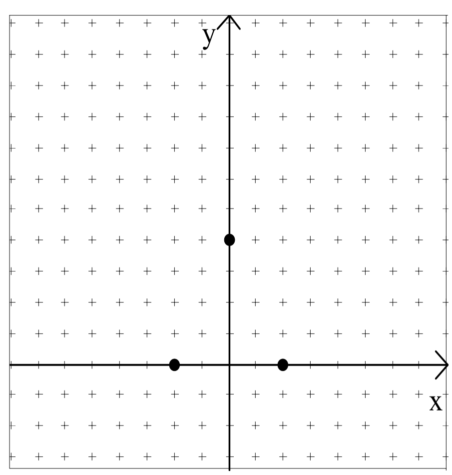
Simetrías	Interpretación gráfica	Procedimiento por realizar
Respecto al eje x		La sustitución de y por –y no produce cambios en la ecuación original.
Respecto al eje y		La sustitución de x por –x no produce cambios en la ecuación original
Respecto al origen		La sustitución simultánea de y por –y y x por –x no altera la ecuación original

Tercero: Tabulación de valores.

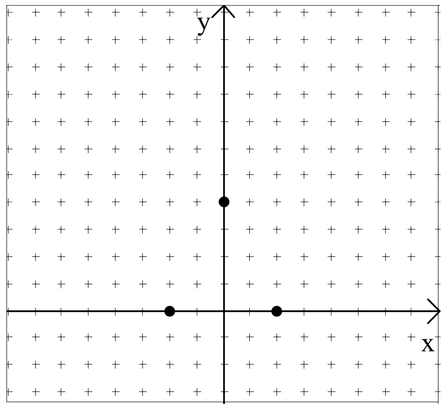
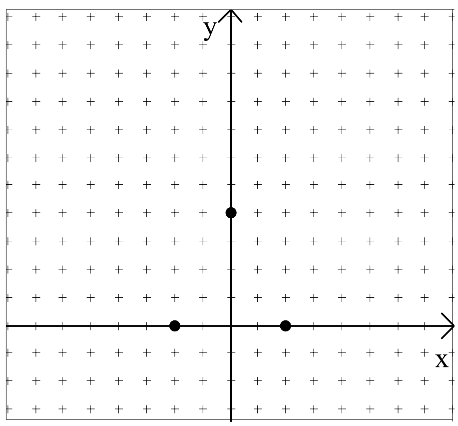
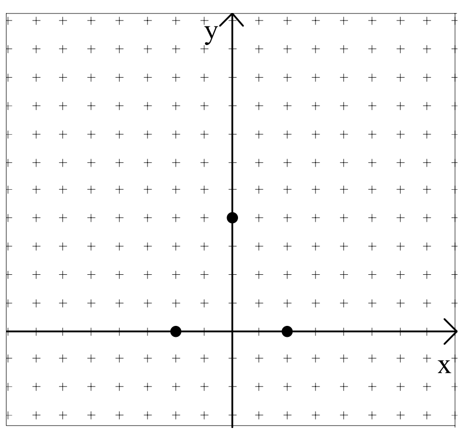
Para tabular, tal como se vio en matemáticas 1, asignamos algunos valores a "x" y obtenemos el correspondiente valor de "y". Determinando primeramente cuáles valores se le pueden asignar, cuidando que no queden raíces de números negativos o divisiones entre 0, es decir, el dominio.

Para ejemplificar lo anterior, tomaremos la ecuación $y = 4 - x^2$ y la graficaremos según el procedimiento anterior:

Primero: Intersecciones con los ejes.

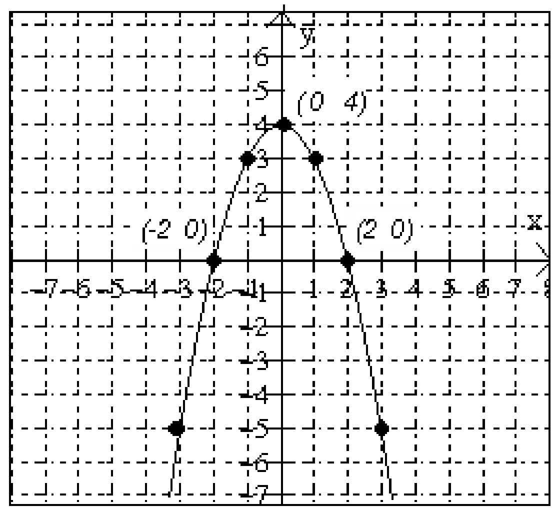
Procedimiento	Interpretación gráfica	Intersección
Para determinar la intersección con el eje x hacemos y = 0 y sustituimos en la ecuación obteniendo el valor de x (a). Veamos el ejemplo: $0 = 4 - x^2$ $-4 =- x^2$ $4 = x^2$ $\sqrt{4} = \sqrt{x^2}$ $\pm 2 = x$ Por lo tanto, encontramos los puntos (2, 0) y (-2 ,0) que aparecen en la gráfica.		Con el eje x
Para determinar la intersección con el eje y, hacemos x = 0 sustituimos en la ecuación obteniendo el valor de y (b). En el ejemplo: $y = 4 - 0^2$ $y = 4$ por lo tanto, tenemos el punto (0, 4)		Con el eje y

Segundo: Simetría respecto a los ejes y al origen.

Simetrías	Interpretación gráfica	Procedimiento por realizar
Respecto al eje *x*		La sustitución de *y* por *–y* no produce cambios en la ecuación original. Veamos el ejemplo: $y = 4 - x^2$ $-y = 4 - x^2$ $y = -4 + x^2$ Como la ecuación original cambia, la gráfica <u>no es simétrica</u> con respecto al eje *x*.
Respecto al eje *y*		La sustitución de x por –x no produce cambios en la ecuación original. $y = 4 - x^2$ $y = 4 - (-x)^2$ $y = 4 - x^2$ Como la ecuación original no se altera, la gráfica <u>es simétrica</u> respecto al eje *y*. Esta información nos da una idea de cómo es la gráfica de la ecuación.
Respecto al origen		La sustitución simultánea de *y* por *–y* y *x* por –x no altera la ecuación original. $y = 4 - x^2$ $-y = 4 - (-x)^2$ $-y = 4 - x^2$ $y = -4 + x^2$ Como la ecuación cambia, la gráfica <u>no es simétrica</u> respecto al origen.

Tercero: Tabulación $y = 4 - x^2$

X	Y
-3	-5
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0
3	-5



TAREA 2

Página 49.

EJERCICIO 3

Observa tanto en los valores de la tabla como en la gráfica de la ecuación, la simetría con respecto al eje "y"

1. Construye una tabla de valores y representa gráficamente las soluciones de la ecuación $x - y = 2$.

2. Se considera la ecuación $3x - 4y = 12$.
   a) Representa gráficamente todas sus soluciones.

3. Encuentra (si las hay) las intersecciones con los ejes de cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $2x + y - 10 = 0$ b) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ c) $y - x^2 + x + 2 = 0$ d) $x^2 - y = 0$

4. Determina si la gráfica de las siguientes ecuaciones es simétrica respecto al eje *x* , eje *y* o el origen:

   a) $x + 2y - 8 = 0$ b) $2y^2 + x - 5 = 0$ c) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ d) $y = x^3$

5. Grafica las siguientes ecuaciones:

   a) $y = 3x - 2$ b) $y = \pm\sqrt{36 - x^2}$ c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ d) $xy = 1$

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada x es siempre igual a 4?

7. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada y es siempre igual a 2?

1.2. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE RECTAS, SEGMENTOS Y POLÍGONOS

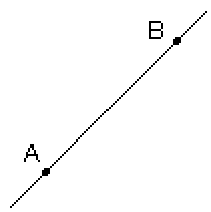
1.2.1. Segmentos Rectilíneos.

Segmento rectilíneo o simplemente segmento, es la porción de recta comprendida entre dos de sus puntos que se llaman extremos, o bien uno origen y otro extremo. Los extremos de un segmento forman parte del mismo. Un segmento de extremos A y B se designa AB.

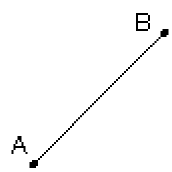
Segmentos dirigidos y no dirigidos

Si en una línea recta, tomamos dos puntos A y B, ellos nos determinan un segmento de recta que podemos designar por AB o BA.

Al conjunto de puntos que se encuentran entre los extremos A y B incluidos estos, forman el segmento AB.

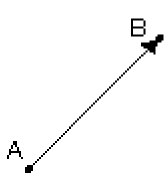


Recta que contiene al segmento AB

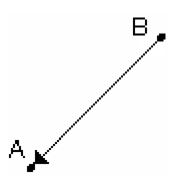


Segmento AB

Cuando a los puntos de un segmento se les indica un orden (por ejemplo desde A hacia B) donde A es el punto inicial y B el punto final se conoce como segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$.



Segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$

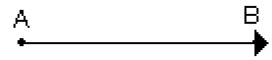


Segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$

La longitud de un segmento dirigido se considera positiva, si su signo es positivo en su notación (AB) y el sentido opuesto será de longitud negativa (BA). Es decir, si la longitud de AB es positiva entonces BA tendrá que ser negativa:
AB = -BA

Segmento no dirigido: es aquella porción de recta denotada por AB, donde únicamente se considera su tamaño (longitud) sin importar su dirección o sentido.

Concluyendo, podemos establecer que:

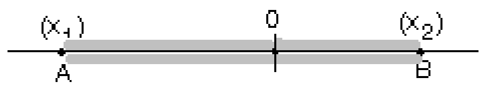
Segmento	Interpretación gráfica	Notación	Equivalencia
No dirigido		$\overline{AB}$ o $\overline{BA}$	$\overline{AB} = \overline{BA}$
Dirigido		$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
Dirigido		$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Longitud de un segmento y distancia entre dos puntos

Para calcular la longitud de un segmento, necesitamos determinar la distancia y el sentido en que ésta se recorre, por lo tanto, la longitud de un segmento puede tener un valor positivo o negativo y la distancia será el valor absoluto $|AB|$ de la longitud.

El valor absoluto nos indica que todas las distancias entre dos puntos son mayores o iguales a cero. Las distancias no pueden ser negativas.

Dados dos puntos A y B donde se conocen sus coordenadas x_1 y x_2



$AB = AO + OB$ pero
AO = - OA entonces
AB = - $OA + AB$
AB = - $x_1 + x_2$
AB = $x_2 - x_1$

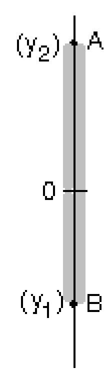
De la misma manera podemos establecer que $BA = x_1 - x_2$.

En general, la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto final de la coordenada del punto inicial.

La distancia de los puntos se define como el valor absoluto de la longitud del segmento, es decir:

$$d = |AB| = |BA|$$
$$d = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Este resultado se puede aplicar también al eje vertical ejemplo:



$$d = |AB| = |BA|$$
$$d = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

EJERCICIO 4

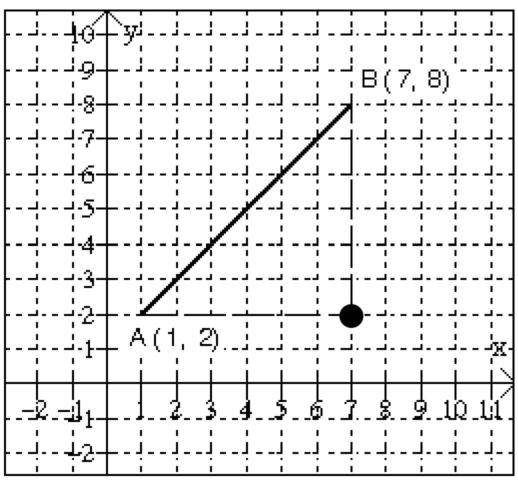
1) Dibuja una recta numérica horizontal y localiza, en ella, los puntos A(4), B(9), C(0), D(-2), E(-6) y F($\sqrt{2}$).
2) Representa en la recta numérica los siguientes números racionales:

   a) 3/2 b) 7/2 c) -1/2 d) -5/2

3) Obtén las distancias: d(AB), d(AC), d(AD), d(AF), d(BC), d(CD), d(CE) y d(DF).
4) Dibuja una recta numérica vertical y localiza los puntos P(5), Q(-2), R(3.4) y O(0).
5) Obtén las distancias: d(PQ), d(RQ), d (OR), d(PO).
6) Dibuja el plano cartesiano, grafica los puntos A(2, 4), B(7, 4), C(-3, 5) y D(-3, -6).
7) Calcula la distancia entre los puntos AB y CD.
8) La coordenada del punto P es $y_1 = -3$. Se sabe que el punto Q se encuentra a una distancia de 5 unidades de P. ¿Cuál es la coordenada de Q? (Dos respuestas).

Distancia entre dos puntos

Las longitudes de los segmentos que hemos calculado anteriormente, tienen que ver únicamente con la distancia entre dos puntos de un segmento de recta, colocado de una forma horizontal o de una forma vertical, veamos ahora qué sucede cuando este segmento de recta tiene una colocación distinta en el plano cartesiano. Observa la gráfica:



¿Podrías sugerir un procedimiento para calcular el valor de la distancia entre los puntos A y B?

En la gráfica observamos que las proyecciones de los puntos a los ejes forman un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa coincide con el segmento AB y recordando que la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede calcular con la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de cada uno de sus catetos como sigue:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$d(AB) = d(AO)^2 + d(OB)^2$$

Como anteriormente vimos que

d(AO)^2 $= \left|x_2 - x_1\right|^2$ y d(OB)$=\left|y_2 - y_1\right|^2$ entonces la distancia de AB queda

d(AB)^2 $= \left|x_2 - x_1\right|^2 + \left|y_2 - y_1\right|^2$

d(AB) $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ← Fórmula general para encontrar la distancia entre dos puntos

Así obtenemos la distancia entre los puntos A y B.

d(AB) $= \sqrt{(7-1)^2 + (8-2)^2}$

d(AB) $= \sqrt{6^2 + 6^2}$

d(AB) $= \sqrt{36 + 36}$

d(AB) $= \sqrt{72}$ u

EJERCICIO 5

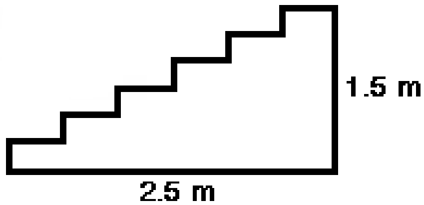
INSTRUCCIONES: Aplicando la fórmula anterior, resuelve los siguientes ejercicios.

1. Grafica los puntos cuyas coordenadas son: A(-2, 6) B(-3, -7), C($\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$), D(5, 7), E (1, 4)
2. Calcula las distancias entre los puntos:
   a) A y B
   b) C y D
   c) A y E
   d) B y D
3. Si A($-1,-1,0$) y B($k,-2,2$), ¿cuáles dos valores puede tomar k para que d(A,B)=3?

4. Demuestra que al unirse los puntos A(3,8), B(-11,3) y C(-8,-2), forman un triángulo isósceles.
5. Demuestra que los puntos G(-3,-2), H(5,2) e I(9,4) son colineales.
6. Demuestra que los puntos J(2,4), K(6,2), L(8,6) y M(4,8), son los vértices de un paralelogramo.
7. Obtén las áreas del triángulo rectángulo del punto 2 y del paralelogramo del punto 4.
8. Si la distancia entre el punto A(-3,6) y B(3,Y), es igual a 10 unidades, obtén la coordenada faltante.
9. Obtén las coordenadas del punto que esté ubicado a la misma distancia de los puntos A(1,7), B(8,6) y C(7,-1).

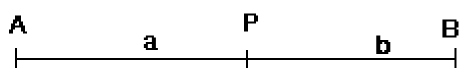
División de un segmento en una razón dada.

Para abordar este tema empezaremos con un pequeño problema que se le presenta a un arquitecto, que tiene que construir una escalera inclinada en un espacio de 2.5 m. de largo por 1.5 m. de altura. La escalera debe tener 6 escalones con la característica de que las medida de las plantillas sean iguales (ancho y alto), como lo muestra la figura.

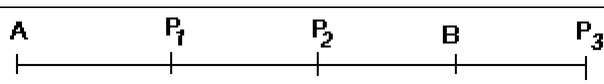


La razón la podemos representar algebraicamente como $r = \frac{a}{b}$; donde a representa la parte recorrida en el segmento de recta y b representa las partes que faltan por recorrer como lo muestra la figura

De donde la razón la podemos expresar como $r = \frac{AP}{PB}$ si observas la gráfica siguiente cuando el punto P está exactamente a la mitad del segmento, tenemos entonces que la razón esta dada como $r = \frac{AP}{PB}$ pero *AP* es igual a *PB,* por lo tanto, $r = 1$



Luego tenemos los siguientes ejemplos de división de un segmento en una razón dada:

Colocación de Puntos P	Valor de la razón r
	$r_1 = \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{2}$ $r_2 = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{2}{1} = 2$
	$r_3 = \frac{AP_3}{P_3B} = \frac{4}{-1} = -4$

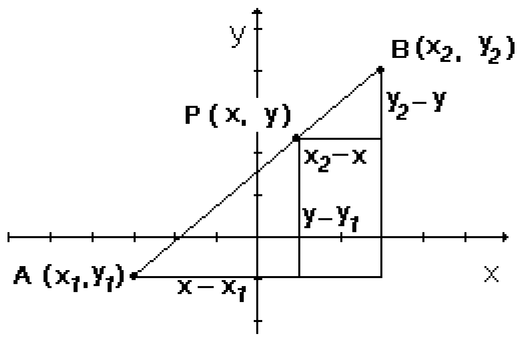
Observa que el valor de la razón puede determinar la localización del punto que divide a un segmento o viceversa.

EJERCICIO 6

INSTRUCCIONES: Realiza el siguiente ejercicio y comprueba los resultados con tus compañeros.

1. Si un segmento AB se divide en cuatro partes; ¿cuál es la razón para cada punto?
2. Si un segmento AB se divide en cinco partes; ¿cuál es la razón para cada punto?

Si las ideas anteriores las trasladamos a un sistema de coordenadas, observamos las coordenadas del punto P (x, y) que se ubica en la división del segmento de la siguiente manera:



Siendo triángulos semejantes sus lados son proporcionales, por lo tanto tenemos:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x)} = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y)}$$

De donde despejamos x y y obteniendo las coordenadas del punto P (x, y) en una razón r dada.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Veremos el caso especial cuando la razón es igual a uno, es decir, el punto P(x, y) está colocado exactamente en la mitad del segmento, entonces las coordenadas anteriores, se convierten en coordenadas del punto medio.

$$P_m\,(x_m, y_m) = \left(\frac{X_1 + X_2}{Z}, \frac{Y_1 + Y_2}{Z} \right)$$

EJERCICIO 7

INSTRUCCIONES: *En forma grupal deduce la fórmula para encontrar el punto medio de un segmento.*

Ejemplo: Encuentra el punto que divide al segmento AB formado por los puntos A (5, 2) y B (2, 5) en una razón $r = \frac{1}{2}$.

Las coordenadas de este punto las podemos encontrar utilizando la fórmula original o la ecuación despejada.

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 5}{2 - x}$$

$$2 - x = 2x - 10$$

$$-3x = -12$$

$$x = 4$$

De la misma manera para encontrar la coordenada *y* realizamos la misma operación.

$$r = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y - 2}{5 - y}$$

$$5 - 2y = 2y - 4$$

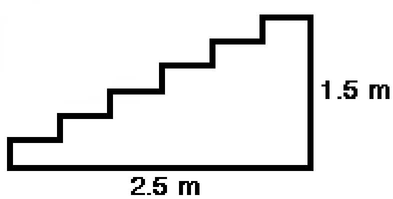
$$-3y = -9$$

$$y = 3$$

Así las coordenadas del punto P (x, y) que divide al segmento AB en una razón

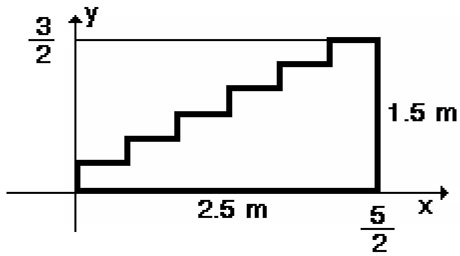
$r = \frac{1}{2}$ son P (4, 3)

Ahora ¿recuerdas el problema de la escalera planteado al principio del tema? Un arquitecto tiene que construir una escalera inclinada en un espacio de 2.5 m. de largo por 1.5 m de altura. La escalera debe tener 6 escalones con la característica de que las medidas de las plantillas deben ser iguales (ancho y alto). Como lo muestra la figura. Ahora lo resolveremos aplicando el concepto de razón y división de un segmento.



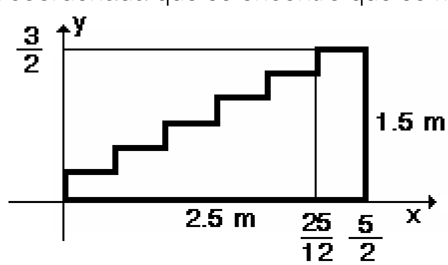
Si queremos obtener las dimensiones del primer escalón y tomando la definición de razón $r = \frac{a}{b}$ tendríamos que la razón es $\frac{1}{5}$. Y si queremos trabajar con el ultimo escalón la razón será 5.

Para resolver el problema, tomaremos la razón igual a 5 y las coordenadas de los puntos como lo muestra la figura.



$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1+r} = \frac{0 + 5\left(\frac{5}{2}\right)}{1+5} = \frac{\frac{25}{2}}{6} = \frac{25}{12}$$

Para encontrar lo ancho de la plantilla restamos a la distancia total el valor, calculado por la coordenada que se encontró que se muestra en la figura.

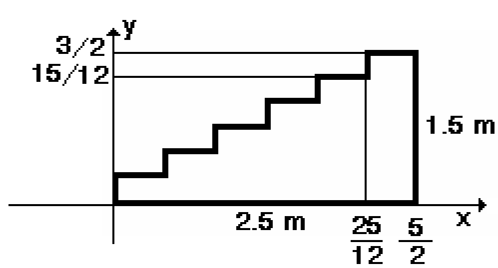


$$\frac{5}{2} - \frac{25}{12} = \frac{5}{12} = 0.416\ m$$

De la misma manera para encontrar la altura de la plantilla, tomamos las coordenadas en *y,* y transformamos 1.5 m a racional $= \frac{3}{2}$.

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{0+5\left(\frac{3}{2}\right)}{1+5} = \frac{\frac{15}{2}}{6} = \frac{15}{12}$$

Igual para encontrar la altura de la plantilla, restamos a la distancia total el valor calculado.



$$\frac{3}{2} - \frac{15}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25\,m.$$

De los cálculos anteriores tenemos entonces las medidas de cada escalón, que deben ser 0.416m de ancho por 0.25 m de alto.

EJERCICIO 8

Instrucciones: Realiza en equipo los siguientes ejercicios elaborando sus gráficas correspondientes en cada caso y en forma grupal comprueba los resultados con ayuda de tu maestro.

1. Obtén las coordenadas del punto que divida al segmento determinado por los puntos A(1,7) y B(6,-3) en la razón r = 2/3.

2. Obtén las coordenadas del punto que divida al segmento determinado por los puntos: C(-2,1) y D(3,-4) en la razón r = -8/3.

3. Obtén las coordenadas del extremo B del diámetro de una circunferencia cuyo centro está ubicado C(-4,1) y que además tiene como extremo el punto A(2,6).

4. Obtén las coordenadas de dos puntos que dividan en tres partes iguales al segmento determinado por A(3,-1) y B(9,7).

5. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto P, llamado Baricentro, situado de los vértices a 2/3 de la distancia de cada uno de ellos al punto medio del lado opuesto. Obtén las coordenadas del baricentro de un triángulo cuyos vértices tienen las coordenadas $A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$ y $C(X_3,Y_3)$.

6. Encontrar la razón "r" en la que el punto P(4, 2) divide al segmento A(-2, -4) y B (8, 6).

7. Encontrar el punto medio de cada uno de los lados del triángulo P(-2, 5), Q (6, 1) y R (4, -5)

1.2.2. Rectas.

La recta es, probablemente, la figura más familiar y utilizada en geometría, ya que se puede observar en casi todo lo que nos rodea. Existe una gran cantidad de problemas que pueden modelarse por medio de rectas o aproximaciones a éstas. En este tema veremos como medir la inclinación de una (qué tan "inclinada" está una recta), empleando para ello su ángulo de inclinación y su pendiente, ya que ésta se emplea en la solución de problemas en Cálculo, Física, Economía, etc. Veremos también cómo poder determinar cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares y qué condiciones deben cumplir sus pendientes para ello.

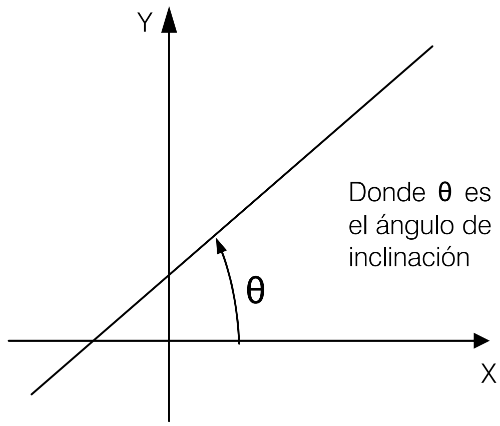
Ángulo de inclinación y pendiente de una recta.

Para definir el concepto de pendiente debe conocerse, primeramente, lo que se entiende por ángulo de inclinación.

Podemos decir que dos rectas como las mostradas en las siguientes figuras están inclinadas.

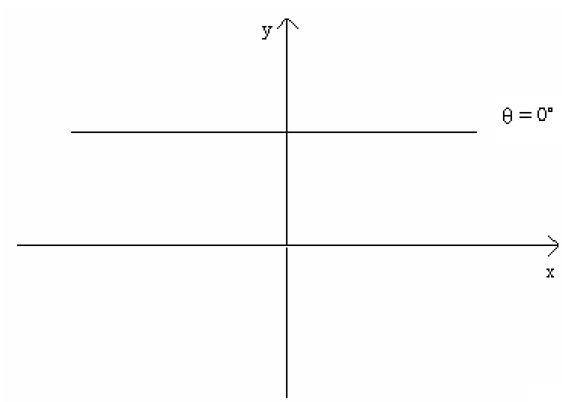
La inclinación de una recta se mide respecto al eje X y lo hacemos por medio de un ángulo expresado en grados, minutos y segundos (˚,’,’’). Como siempre que se cortan dos rectas se forman cuatro ángulos, hay que establecer cual de los cuatro es el que llamaremos ángulo de inclinación (θ) y una vez hecho, los otros tres se pueden deducir a partir de él.

Se llama ángulo de inclinación de una recta (θ), al ángulo formado por dicha recta y el extremo positivo del eje X y se mide desde el eje hasta la recta, siguiendo el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

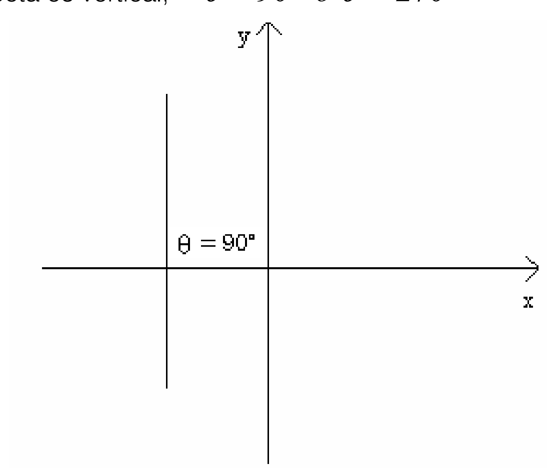


(Obsérvese que el eje Y no se toma en cuenta)

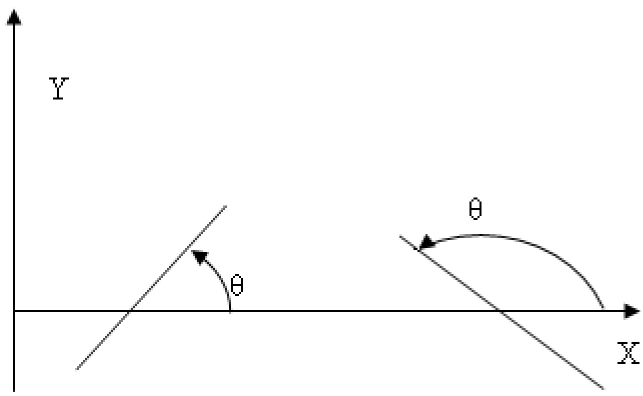
Si una recta es horizontal, $\theta = 0°$ ó $\theta = 180°$.



Si una recta es vertical, $\theta = 90°$ ó $\theta = 270°$



El valor del ángulo de inclinación de una recta varía entre 0° y 180°, esto es: $0° \le \theta \le 180°$



Una vez visto lo que es el ángulo de inclinación de una recta, veremos lo que es su pendiente, ya que en la mayoría de los problemas se utiliza más el valor de la tangente del ángulo de inclinación que el ángulo mismo.

Se llama pendiente de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. La pendiente de una recta la representaremos con la letra m, por lo tanto podemos escribir:

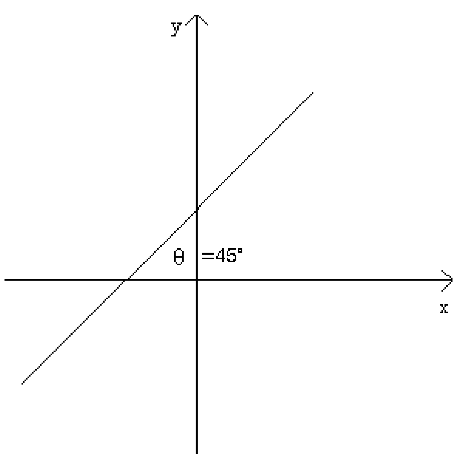
$$m = \tan\theta$$

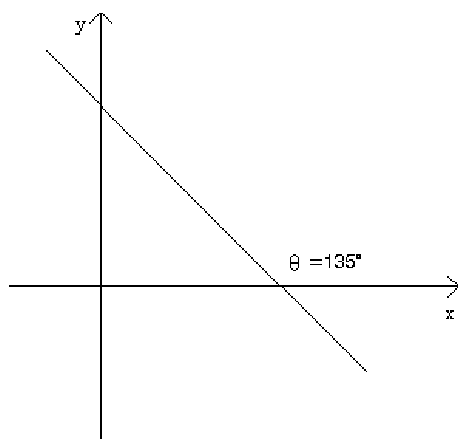
Por ejemplo, si el ángulo de inclinación de una recta es $\theta = 45°$, el valor de su pendiente es igual a 1 (positivo).

$$m = \tan\theta = \tan 45° = 1$$

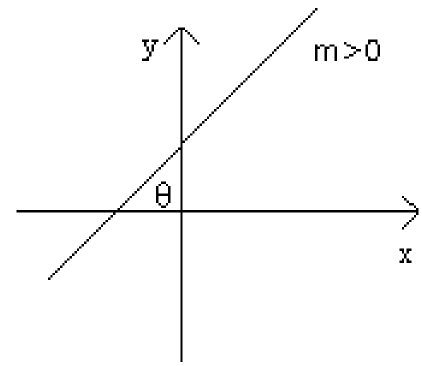
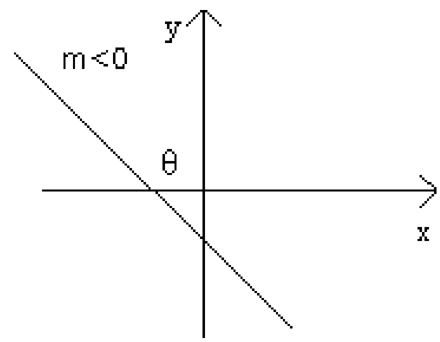
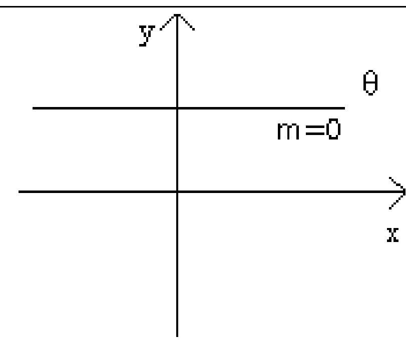
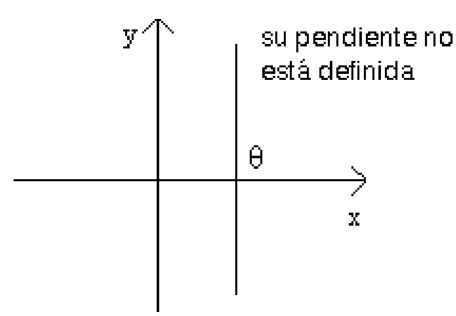
Pero si $\theta = 135°$, el valor de su pendiente es -1 (negativo), ya que:

$$m = \tan\theta = \tan 135° = -1$$



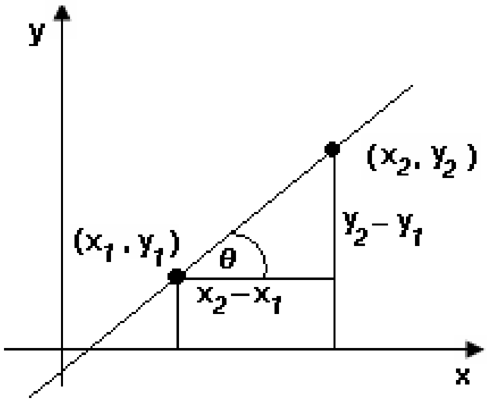


En general, podemos hacer las siguientes afirmaciones:

Si θ es agudo ($0° < \theta < 90°$), la pendiente de la recta es positiva ($m>0$).	
Si θ es obtuso ($90°<\theta< 180°$) la pendiente es negativa ($m< 0$).	
Si $\theta = 0°$ ó $180°$, la recta coincide o es paralela al eje X ($m = 0$).	
Si $\theta = 90°$, la recta coincide o es paralela al eje Y ($m = \propto$ ó no existe).	

Si no sabemos el ángulo de inclinación de la recta, pero conocemos dos puntos por los que pasa A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), podemos obtener el valor de la pendiente m utilizando la definición de tangente de un ángulo, es decir:

$$m = \tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$



También, si tenemos el valor de m, y queremos determinar la medida del ángulo de inclinación, utilizamos la función arco tangente como sigue:

$$\theta = \arctan(m) = \tan^{-1}(m)$$

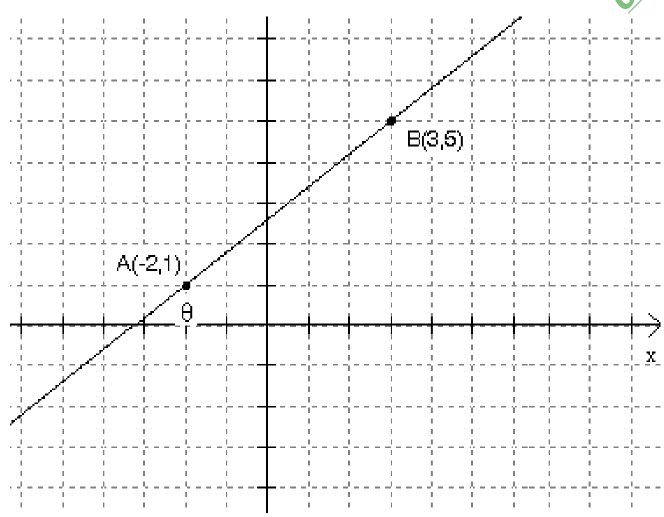
Ejemplo 1. Encontrar la pendiente (m) y el ángulo de inclinación (θ) de una recta que pasa por los puntos A(-2,1) y B(3,5).

Para obtener el valor de la pendiente, utilizamos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3-(-2)} = \frac{5-1}{3+2} = \frac{4}{5}$$

Para obtener el valor del ángulo de inclinación θ, utilizamos:

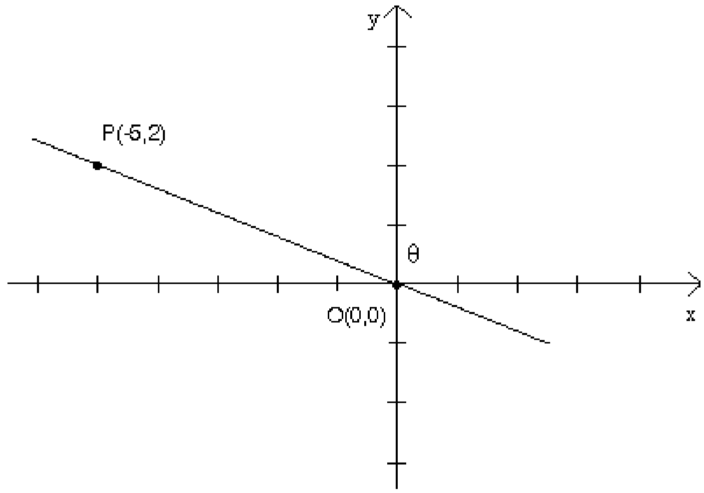
$$\theta = tan^{-1}(m) = tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 38°\ 39'\ 35.31''$$



Ejemplo 2. Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen O (0,0) y el punto P (-5,2).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{-5-0} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

$$\theta = tan^{-1}(m) = tan^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = -21°\,48'\,5.07'' = 158°\,11'\,54.9''$$



NOTA: Cuando la pendiente es negativa sumar 180° para obtener el ángulo obtuso

Ejemplo 3. Obtener la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos G(-2,-4) y H(3,-4).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4+4}{3+2} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\theta = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(0) = 0°$$ (Recta horizontal)

Ejemplo 4. Unos albañiles quieren construir una rampa que va desde el punto A(3,-2) hasta el punto B(-15,8), ¿cuál debe ser la pendiente de la rampa?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8+2}{-15-3} = \frac{10}{-18} = -\frac{5}{9}$$

¿Cuánto mide su ángulo de inclinación?

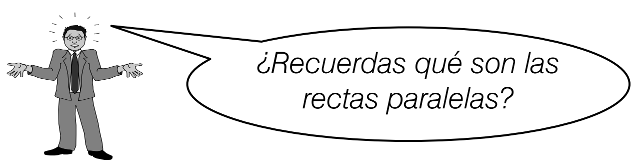
Si tenemos un punto y su pendiente, podemos encontrar un segundo punto por donde pasa la recta tomando la definición de pendiente donde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Tomando el ejemplo anterior, tenemos que un punto es A(3,-2) y la pendiente es $-\frac{5}{9}$; para localizar el punto B recorremos 9 unidades a la izquierda del punto A y posteriormente 5 unidades hacia arriba hasta llegar al punto (-6, 3).

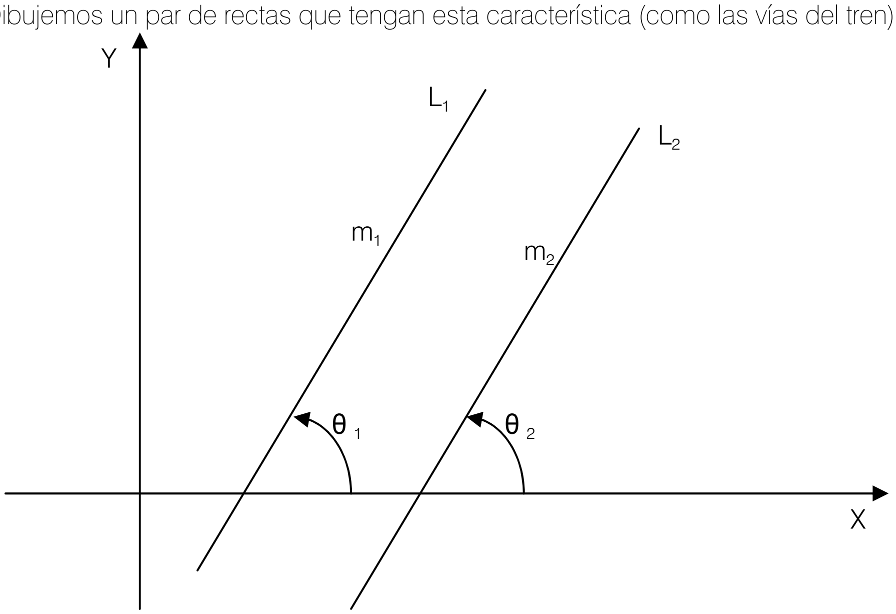
Una aplicación del concepto de pendiente para un automovilista es por ejemplo, cuando se dice que un camino tiene el 5% de pendiente significa que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades y se representa como $\frac{5}{100}$.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Primeramente hablaremos de las rectas paralelas.



Dibujemos un par de rectas que tengan esta característica (como las vías del tren):



Observando estas dos líneas en el dibujo podríamos decir que:

$$\theta_1 = \theta_2$$

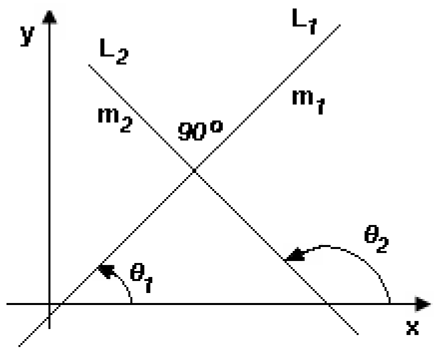
Por ser ángulos correspondientes; y puesto que el valor de la tangente de dos ángulos iguales es el mismo, también se cumple que:

$$m_1 = m_2$$

Que llamaremos criterio de paralelismo.

Así que si dos rectas son paralelas y, por ejemplo, $m_1 = \frac{3}{2}$, entonces $m_2 = \frac{3}{2}$. (Las pendientes de rectas paralelas son iguales). Lo inverso también se cumple, esto es, si las pendientes de dos rectas son iguales, entonces las rectas son paralelas.

Por otra parte dos rectas perpendiculares son aquellas que al cortarse forman ángulos rectos.



Si observas la figura te darás cuenta que una recta tiene un ángulo de inclinación agudo (m>0) y la otra un ángulo obtuso (m<0), por lo que podemos decir que los signos de las pendientes de rectas perpendiculares son contrarios, pero además son recíprocos, es decir, que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1. (La demostración se puede consultar en la bibliografía).

$$m_1 m_2 = -1$$

Que llamaremos criterio de perpendicularidad..

Así que si dos rectas son perpendiculares y, por ejemplo, $m_1 = \frac{3}{2}$, entonces $m_2 = -\frac{2}{3}$. (Las pendientes de rectas perpendiculares son recíprocas y de signo contrario).

Lo inverso también se cumple, esto es, si las pendientes de dos rectas son recíprocas y de signo contrario, entonces las rectas son perpendiculares (excepto en el caso de rectas horizontal y vertical).

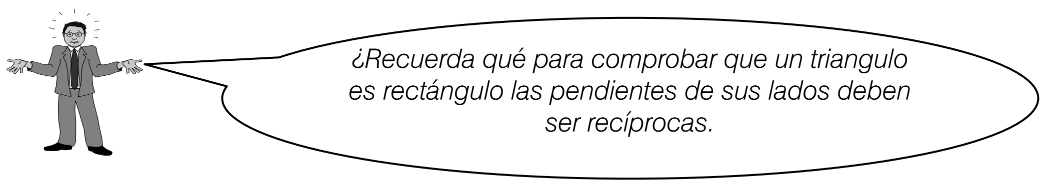
Ejemplo 1. Comprobar que la recta que pasa por los puntos A(1,-2) y B(-2, 4) es paralela a la recta que pasa por los puntos P(4, 3) y Q(3, 5).

$$m_1 = m(AB) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+2}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$m_2 = m(PQ) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{3-4} = \frac{2}{-1} = -2$$

Como $m_1 = m_2$, las rectas AB y PQ son paralelas.

Ejemplo 2. Comprobar, usando pendientes, que el triángulo con vértices en A(8, 3), B(2,10) y C(4, 2) es rectángulo.



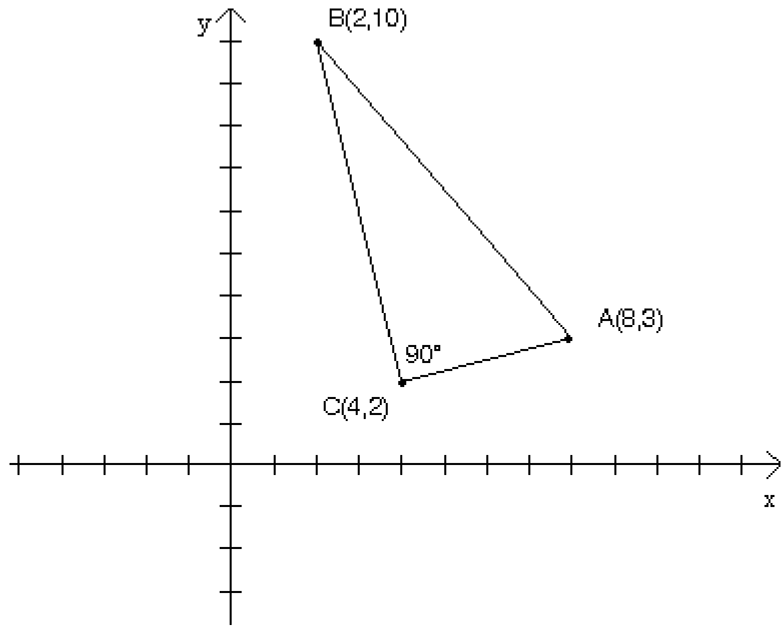
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-3}{2-8} = \frac{7}{-6} = -\frac{7}{6}$$

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-10}{4-2} = \frac{-8}{2} = -\frac{4}{1} = -4$$

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{4-8} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$m_{BC} \cdot m_{AC} = \left(-\frac{4}{1}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{4} = -1$$

Como las pendientes de BC y AC son recíprocas y de signo contrario, son perpendiculares; por lo tanto, el ángulo C es de 90° y el triángulo ABC es rectángulo.



EJERCICIO 9

Instrucciones: En equipo, resuelve los siguientes ejercicios graficando cada uno de ellos y comparando con el resto del grupo, los resultados de cada equipo:

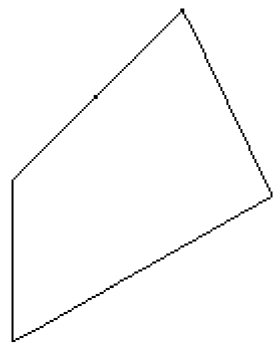
1) Encuentra la distancia y la pendiente entre los puntos P1 (2, -8) y P2 (3, 5).
2) Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que por:
   a) A(3,-1) y B(6,2).
   b) P(0, -3) y Q(-3, 4),
   c) D(2, -3) y E(2, 4).
3) Comprueba, usando pendientes, que los puntos D(-3, -1), E(-1,6) y F(3, 16) son colineales.
4) Una recta de pendiente m =- ¾ pasa por el punto K(-2,5) y L(6, y). Halla el valor de "*y*".
5) Comprueba, utilizando pendientes, que los puntos O(0,0), P(3,1), Q(5,3) y R(2,2), son vértices de un paralelogramo.
6) ¿Es la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,-1) perpendicular a la recta que pasa por C(-4,-1) y D(-1,2)?

TAREA 3

Página 51.

1.2.3. Polígonos: perímetros y áreas.

Una familia desea vender el terreno que le dejó su padre de herencia cuyas formas son las que se representan en la figura, y quieren saber ¿cuál es el valor de cada terreno si el metro cuadrado es de $20.00?



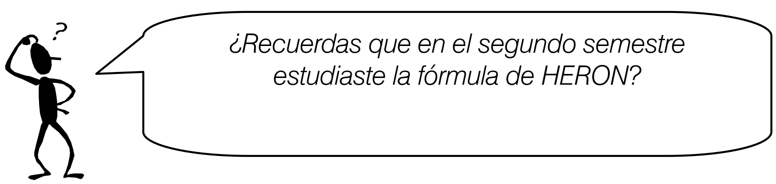
¿Podrías ayudarles a determinar el área total del terreno?

¿Tienes las herramientas para lograrlo?

Lo primero que debes identificar es la forma de la figura, como un Polígono y debemos definirlo.

Polígono, es una figura plana y cerrada formada por tres o más segmentos de línea unidos en sus extremos.

Existen varias formas para calcular el área de un polígono pero en este caso vamos a analizar dos de ellos:



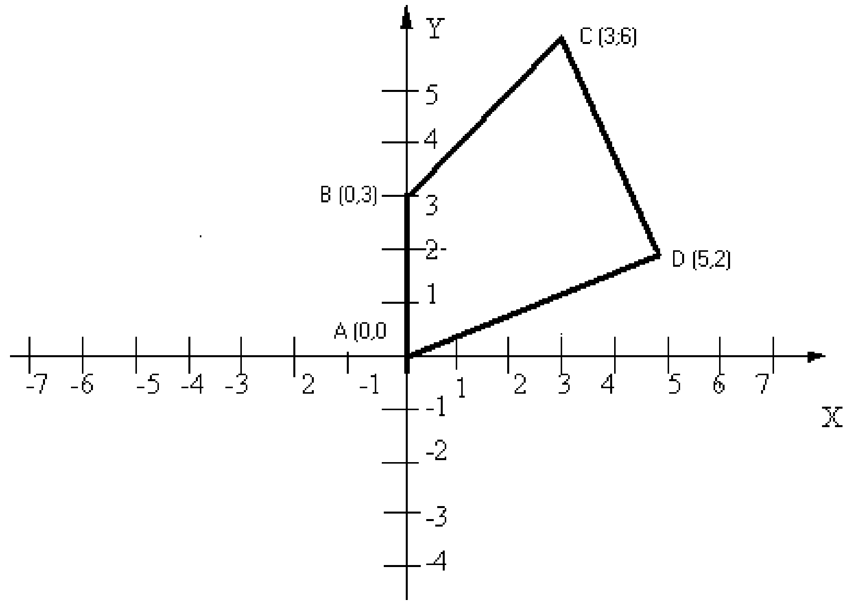
Fórmula de Herón

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde:
a, b, y c, representan la longitud de cada lado del triángulo y s representa al semiperímetro.

Para calcular el área de un polígono se dibujan las diagonales necesarias con el fin de que queden descompuestos en triángulos; después se calcula el área de estos triángulos y se suman los valores obtenidos.

En el caso del problema anterior vamos a trasladar el dibujo del terreno a un plano cartesiano tomando uno de los vértices como el origen como se muestra en la figura:



Y determinamos las coordenadas de los puntos A(0,0) , B (0,3), C (3,6) y D (5,2) una vez identificados procedemos a calcular la distancia de cada lado :

Distancia AB

A(0,0) B (0,3)

$$DAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{(0)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{9}$$

dAB = 3

Distancia BC

B(0,3) C(3,6)

$$DBC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (6-3)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{9+9}$$
$$= \sqrt{18}$$

dBC = 4.2426

Distancia CD

C(3,6) D(5,2)

$$DAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-3)^2 + (2-6)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+16}$$
$$= \sqrt{20}$$

dCD = 4.4721

Distancia AD

A(0,0) D(5,2)

$$DBC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{25+4}$$
$$= \sqrt{29}$$

dAD = 5.3851

Distancia diagonal AC

A(0,0)   C(3,6)

DAB $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(3-0)^2 + (6-0)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45}$

dCD = 6.7082

Con estas distancias podemos calcular el perímetro y el semiperímetro de cada triángulo.

Triángulo I

P = dAB + dBC + dAC

P = 3 +4.2426 + 6.7082

P = 13.95

Y el semiperímetro es la mitad del perímetro

$$S = \frac{p}{2} = \frac{13.95}{2} = 6.9754$$

Una vez que tenemos todas las medidas de cada uno de los lados, utilizaremos la fórmula de Herón para calcular el área de cada uno de los dos triángulos resultantes.

DATOS: a =3 ; b= 4.2426 y c = 6.7082   y s = 6.9754

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{6.9754(6.9754-3)(6.9754-4.2426)(6.9754-6.7082)}$$

$$A = \sqrt{6.9754(3.9753)(2.7328)(0.2672)}$$

$$A = \sqrt{20.2485}$$

A = 4.4998

Triángulo II

P = DCD +DAD +DAC

p = 4.4721+5.3851+6.7082

P = 16.5654

Y el semiperímetro es la mitad del perímetro

$$S = \frac{p}{2} = \frac{16.5654}{2} = 8.2827$$

DATOS: a= 4.4721; b= 5.3851 y c= 6.7082 s = 8.2827

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{8.2827(8.2827-4.4721)(8.2827-5.3851)(8.2827-6.7082)}$$

$$A = \sqrt{8.2827(3.8106)(2.8976)(1.5745)}$$

$$A = \sqrt{143.9946}$$

A = 11.9997

Entonces el área total, es la suma de ambas áreas:

At = AI + AII

At = 4.4998+11.9997

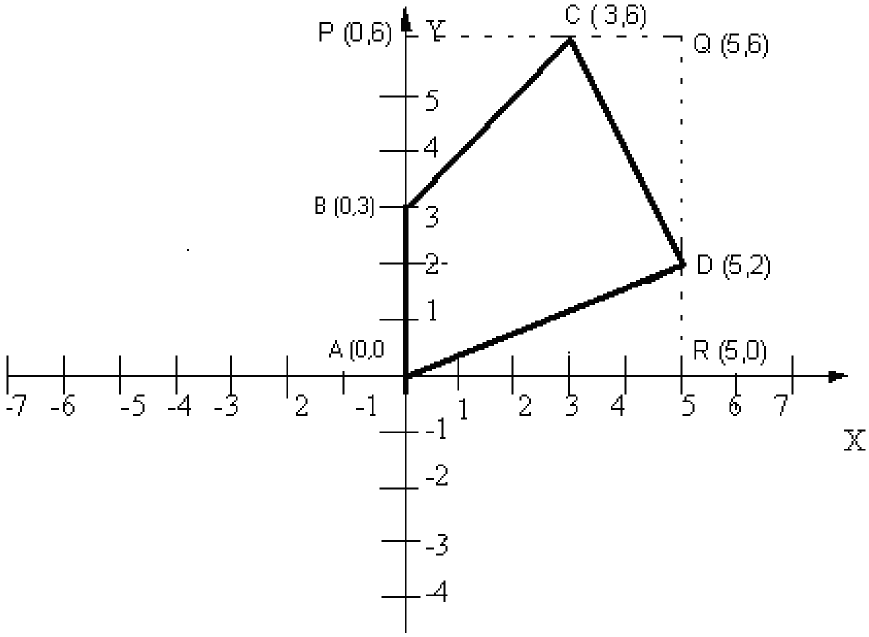
At = 16.4995 u2

REGLA DE SARRUS

Se utiliza para determinar el área de un polígono utilizando las coordenadas de sus vértices y representa un método alternativo para encontrar el área por medio de coordenadas de los vértices. Considerando:

A (X_1 , Y_1) B (X_2 , Y_2) C (X_3 , Y_3) D (X_4 , Y_4)

Primeramente, vamos trazar paralelas a los ejes de tal manera que el cuadrilátero quede inscrito en otro cuyos vértices serían A (0,0), P (0,6), Q (5,6) y R (5,0) a encerrar a la figura dentro de un rectángulo, el cual estaría limitado en sus extremos por los vértices del triángulo, de la forma siguiente:



Donde se delimitan perfectamente tres triángulos rectángulos donde podemos aplicar la ecuación para obtener el área $A = \frac{bh}{2}$. Y aplicando el concepto de distancia entre dos puntos sobre una recta visto anteriormente.

$$d = X_2 - X_1$$

dAR =5 – 0
dAR = 5

$$d = Y_2 - Y_1$$

dAP = 6 – 0
dAP = 6

De donde el área del rectángulo APQR es 5(6)= 30 U^2

Observando el dibujo nos damos cuenta que si restamos el área de los triángulos a esta área del rectángulo obtendremos el área del polígono.

Entonces el área del triángulo:

1) $BPC = \frac{3*3}{2} = 4.5$

2) $CQD = \frac{2*4}{2} = 4$ y

3) $\frac{5*2}{2} = 5$

TAREA 4

Página 53.

Entonces el área del cuadrilátero es:

A_t = Área del rectángulo – Área de los triángulos

A_t =30- 13.5

A_t = 16.5 u^2

Este resultado puede obtenerse con la llamada regla de Sarrus:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(30+9-6)=\frac{1}{2}(33)=16.5u^2$$

EJERCICIO 10

1. Encontrar el área del triángulo A (-4, -3), B (-1, 5) y C (3, 2).

2. Encontrar del área del cuadrilátero P (4, 0), Q (2, 5), R (-3, 2) y S (-1, -6).

3. Encuentra los vértices de un triángulo de área 15 u^2.

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la auto evaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.

TAREA 1

Nombre____

No. de lista ________________ Grupo __________________________

Turno________________________________ Fecha _______________

INSTRUCCIONES: Investiga:

a) ¿Qué son las coordenadas polares? y ¿Dónde se utilizan?

b) ¿Qué coordenadas polares le corresponden al punto P(3, 4)?

c) ¿Qué son las coordenadas geográficas? y ¿Dónde se utilizan?

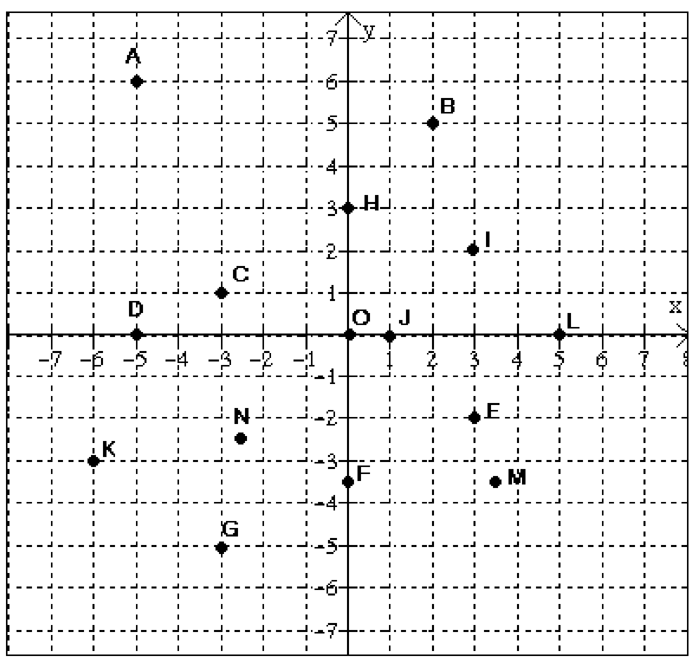
d) ¿Cuáles son las coordenadas geográficas de tu ciudad?

II. Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos:

P(-2, 4) Q(0, -3) R(-5, 0) S(0, 0) $T\left(\frac{7}{2}, \frac{2}{5}\right)$

III. Escribe las coordenadas que correspondan a cada punto del plano.

A( )
B( )
C( )
D( )
E( )
F( )
G( )
H( )
I ( )
J( )
K( )
L( )
M( )
N( )
O( )



Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre____

No. de lista _____________ Grupo ____________________

Turno_______________________ Fecha ____________

INSTRUCCIONES: Realiza en cada caso lo que se pide.

1. Encuentra (si las hay) las intersecciones con los ejes de cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $3x + y - 12 = 0$ b) $9x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ c) $y - x^2 - x + 2 = 0$ d) $x^2 - y = 4$

2. Determina si la gráfica de las siguientes ecuaciones es simétrica respecto al eje *x* , eje *y* o el origen:

   a) $x + y - 2 = 0$ b) $y^2 + x - 5 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ d) $y = x^3$

3. Grafica las siguientes ecuaciones:

   a) $y = 5x - 2$ b) $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ d) $xy = -1$

4. Describe con una figura el perímetro permitido a una mascota amarrada a un árbol, cuyas coordenadas las podemos situar en (-2, 3) y cuya cuerda es de 12 metros.

5. Describe con una figura el lugar geométrico trazado por la trayectoria de un avión en el cielo, el cuál está siendo observado por dos personas desde la tierra, una a cada lado de la trayectoria y a la misma distancia del avión.

6. Demuestra que al unirse los puntos A(-3, 1), B(2, -4) y C(6, 5), forman un triángulo isósceles.

7. Demuestra que al unirse los puntos D(2, -4), E(8, 2) y F(4, 6), forman un triángulo rectángulo.

8. Demuestra que los puntos G(-6, 5), H(-3, 3) e I(3, -1) son colineales.

9. Demuestra que los puntos J(-6, -1), K(2, 1), L(4, 7) y M(-4, 5) son los vértices de un paralelogramo.

10. Obtén las áreas del triángulo rectángulo del punto 2 y del paralelogramo del punto 4.

11. Si la distancia entre el punto A(x, 5) y B(2, -3) es igual a 10 unidades, obtén la coordenada faltante.

12. Obtén las coordenadas del punto que esté ubicado a la misma distancia de los puntos A(-4 11), B(8, 5) y C(-4 5).

Revisión: ______________________________

Observaciones: ______________________________

____

____

____

TAREA 3

Nombre____

No. de lista _______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Realiza lo que se te pide y entrega un reporte a tu profesor:

I. Obtén la pendiente de las rectas, cuyos ángulos de inclinación sean:
1. $\theta = 30°$
2. $\theta = 40°$
3. $\theta = 145°$
4. $\theta = 130°$

II. Obtén la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos:
1. A(4, 5) y B(-8, -6)
2. C(-8, 5) y D(4, -3)
3. E(5, 4) y F(-8,4)
4. G(5, 6) y H(5, 20)

III. Utilizando el concepto de pendiente, demuestra que los siguientes conjuntos de puntos son colineales:
1. A(-3, 4), B(3, 2) y C(6, 1)
2. D(-7, -5), E(0, 1) y F(14, 13)
3. G(8, -2), H(-2, 3) y J(4, 0)
4. K(-7,6), L(3, 2) y M(5,7)

Revisión: ____

Observaciones: ____________________________________

____

____

____

TAREA 4

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: Realiza lo que se te pide y entrega un reporte a tu profesor:

I. Obtén el área de los siguientes polígonos:
   1. A(1, 5), B(3, -4) y C(-2, -6)
   2. D(-3, 4), E(6, -5) y F(2, 5)
   3. G(10, 5), H(3, -2), I(-7, -4) y J(-5, 2)
   4. K(-6, 3), L(-4, -6), M(5, -6) y N(3, 2)
   5. P(2, 8), Q(5, 5), R(4, -2), S(-3, -6), T(-5, 2) y U(-3, 6)

II. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de puntos, no es un polígono?
   1. A(0, 4), B(3, -2) y C(-2, 8)
   2. D(10, 5), E(3, 2) y F(6, -5)
   3. G(-2, 3), H(-6, 1) y J(-10, -1)
   4. K(6, 7), L(-8, -1) y M(-2, -7)
   5. N(-3, -2), P(5, 2) y Q(9, 4)

III. Obtén el área del paralelogramo donde tres de sus vértices son:
   1. A(-2, 3), B(4, -5) y C(-3, 1)
   2. D(3, 6), E(-6, 3) y F(9, -6)
   3. G(1, 1), H(5, 3), e I(6, -4)
   4. J(10, 5), K(3, 2) y L(6, -5)
   5. M(1, 3), N(-2, -3) y P(3, 7)

Revisión: ______________________________________

Observaciones: __________________________________

____

____

____

AUTOEVALUACIÓN

Nombre ____

No. de lista ______________ Grupo ______________________

Turno ____________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: De acuerdo a lo visto en clase contesta las siguientes preguntas, eligiendo la respuesta correcta, rellenando totalmente el círculo que corresponda:

1. El punto P(4, -3) se encuentra en el cuadrante:

Ⓐ Primero.
Ⓑ Segundo.
Ⓒ Tercero.
Ⓓ Cuarto.

2. Las intersecciones con el eje Y de la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 - 16 = 0$ son:

Ⓐ (16, 0) y (-16, 0).
Ⓑ (0, 4) y (0, -4).
Ⓒ (0, 16) y (0, -16).
Ⓓ (4, 0) y (-4, 0).

3. La gráfica de la ecuación $y^2 - 8x + 16 = 0$ es simétrica respecto:

Ⓐ Al eje X.
Ⓑ Al eje Y.
Ⓒ Al origen.
Ⓓ Al punto (-8, 16).

4. Utilizando la fórmula de la distancia podemos decir que los puntos (7, 8), (-7, 0) y (-1, -6), son vértices de un triángulo:

Ⓐ Equilátero.
Ⓑ Escaleno.
Ⓒ Isósceles.
Ⓓ Congruente.

5. Uno de los diámetros de una circunferencia, es el segmento con extremos en A(-2, -5) y B(6, 3). El centro de la circunferencia es el punto:

Ⓐ (3, 2).
Ⓑ (2, -1).
Ⓒ (-2, 3).
Ⓓ (-4, -4).

6. Las coordenadas de un punto P(x, y) que divide al segmento A(-2, 1) y B(6, -7) en la razón $\frac{1}{3}$, son:

Ⓐ (5, 3).
Ⓑ (4, -5).
Ⓒ (-4, 3).
Ⓓ (3, -4).

7. Una recta pasa por los puntos A(-5, -3), B(3, 1) y C(7, y). Utilizando pendiente, podemos determinar que el valor de “y” es:

Ⓐ 3.
Ⓑ 5.
Ⓒ 0.5.
Ⓓ -3.

8. La recta L_1 pasa por los puntos (-1, 6) y (5, -2); La recta L_2 pasa por (4, 2) y (8, 5). Utilizando sus pendientes podemos decir que L_1 y L_2 son rectas:

Ⓐ Oblicuas.
Ⓑ Paralelas.
Ⓒ Perpendiculares.
Ⓓ Simétricas.

9. El área del cuadrilátero con vértices en P(2, 5), Q(7, 1), R(3, -4) y S(5, 1) es:

Ⓐ 25 u^2.
Ⓑ 35 u^2.
Ⓒ 39.5 u^2.
Ⓓ 42.5 u^2.

10. Si el polígono de vértices en A (1, 5), B(-2,4), C(-3, -1), D(2, y), E(5, 1) tiene un área de 40 u^2 , el valor de “y” resulta ser:

Ⓐ -3.
Ⓑ -2.
Ⓒ -2.5.
Ⓓ -4.

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: ***excelente,*** por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es *bueno*, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es *insuficiente*, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

Consulta las claves de respuestas en la página 175.

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre ____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno ______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los siguientes reactivos, resuélvelos y entrega un reporte a tu profesor:

1. Dadas las siguientes condiciones algebraicas, localiza y representa en el plano cartesiano su lugar geométrico.
   A) $y = -2x - 3$ B) $x^2 + y^2 = 9$ C) $xy = 1$ D) $y = 9 - x^2$

2. Demuestra que los puntos L(10, 5), M(3, 2) y N(6, -5), son los vértices de un triángulo rectángulo, además obtén su área.

3. Demuestra que los puntos A(3, 2), B(-1,0) y c(25,13), son colineales.

4. Determina las coordenadas de un punto que equidiste de los puntos A(1, 2), B(3,1) y C(-3, -1).

5. La distancia entre el punto A(-9, 4) y el punto B(X, 8) es d(AB) = 15, obtén el o los valores de “X”.

6. Dado el triángulo determinado por los puntos A(0, 3), B(2, -2) y C(-1,-2), obtén la longitud de sus medianas.

7. Demuestra que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, equidista de los vértices.

8. Encuentra las coordenadas de 2 puntos que dividan al segmento que une A(5, 4) y B(2, -2) en tres partes iguales.

9. Encuentra las coordenadas del extremo del segmento que une este punto con A(2, -2), sabiendo que el punto B(-4,1) está situado a una distancia de A igual a las tres quintas partes de la longitud total del segmento.

10. Obtén las medidas de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son A(-3, -2), B(2, 5) y C(5, 3).

Revisión: ______________________________________

Observaciones: ______________________________________

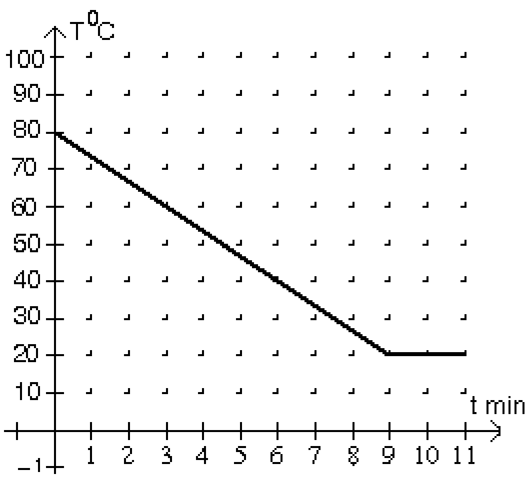
____

____

____

Unidad 2

La línea recta



En su afán por predecir y simular los comportamientos de fenómenos naturales, el hombre ha recurrido a las matemáticas para modelarlos y poder inferir sus comportamientos, por ejemplo el enfriamiento ficticio de una taza de café calentada en un microondas hasta 80° C y dejándola enfriar hasta una temperatura ambiente de 20° C. Podríamos decir que el comportamiento de este fenómeno es lineal y se recurre a las propiedades de una recta para su estudio. De esta forma podríamos estudiar fenómenos de la naturaleza con un comportamiento lineal utilizando la línea recta.

Objetivos:

El alumno:

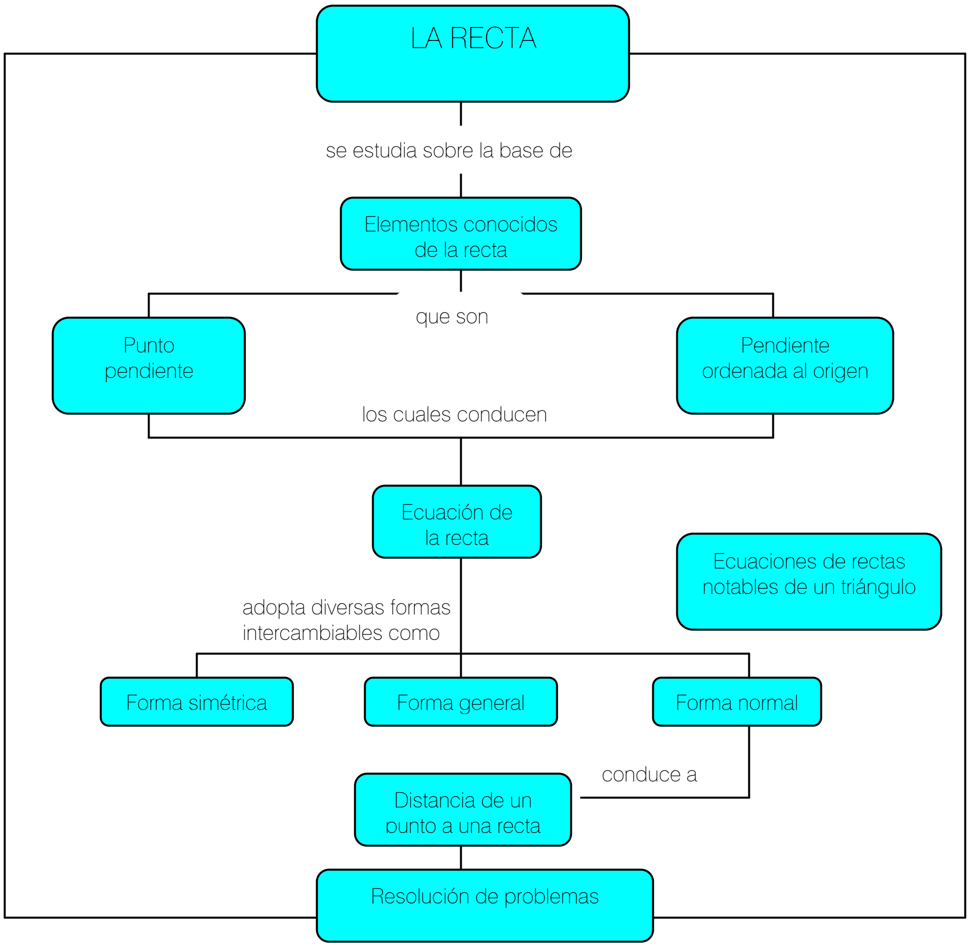
Resolverá problemas teóricos o prácticos que involucren el concepto de línea recta, aplicando e integrando de manera crítica y reflexiva, los conceptos, técnicas y procedimientos básicos de Geometría Analítica, mediante el empleo de distintas formas de la ecuación de la recta y sus transformaciones, gráficas, ecuaciones y propiedades de la recta, así como las ecuaciones de rectas notables en un triángulo; que apliquen en distintos ámbitos del entorno físico en el que se desenvuelve; colaborando a generar un ambiente escolar que favorezca el desarrollo de actitudes de iniciativa, responsabilidad e interés científico.

Temario

2.1. Ecuaciones y propiedades de la recta.
- 2.1.1. Forma punto pendiente.
- 2.1.2. Forma pendiente ordenada en el origen.
- 2.1.3. Forma simétrica.
- 2.1.4. Forma general de la ecuación de la recta.
- 2.1.5. Forma normal de la ecuación de la recta.
- 2.1.6. Distancia entre un punto y una recta.

2.2. Ecuaciones de rectas notables en un triángulo.
- 2.2.1. Medianas.
- 2.2.2. Alturas.
- 2.2.3. Mediatrices.
- 2.2.4. Bisectrices.

MAPA CONCEPTUAL UNIDAD 2



2.1. ECUACIONES Y PROPIEDADES DE LA RECTA

Las formas que observamos en la naturaleza, por ejemplo, las ramas de un árbol, las hojas, las piedras, las formas de las nubes, las formas de las montañas, los ríos, etc., normalmente no se ven en línea recta. Sin embargo, si nos fijamos bien, podemos decir que cada cierto tramo, ya sea de rama de árbol, del contorno de una montaña, o del cauce de un río, se observa como una línea recta. En las construcciones que hace el hombre podemos observar que la línea recta está presente con mayor frecuencia que en la naturaleza.

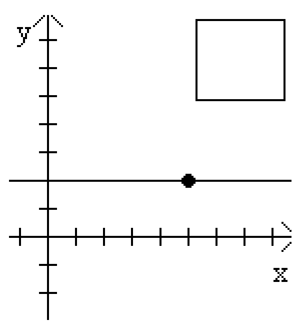
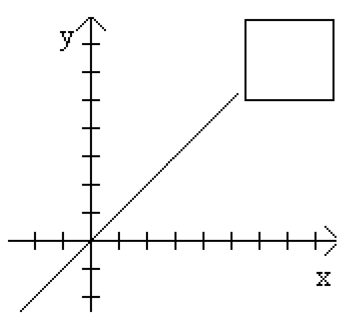
Iniciaremos entonces el estudio de las propiedades de la línea recta, desde el punto de vista de la Geometría Analítica.

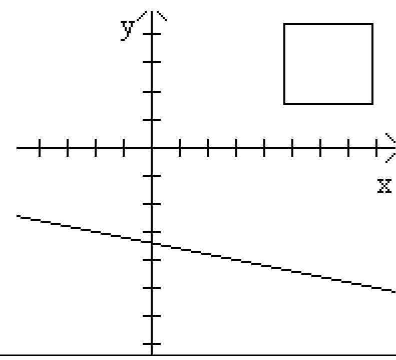
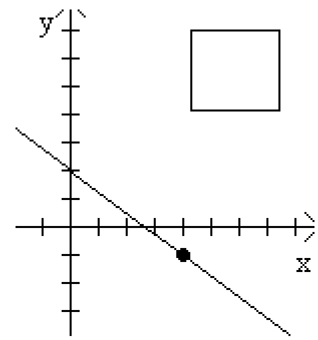
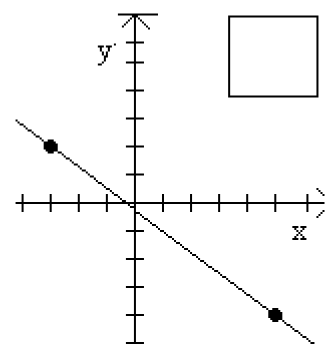
2.1.1. Forma punto-pendiente.

Una de las características del estudio de la Geometría Analítica, es asociar una ecuación a una curva, recta o lugar geométrico y viceversa, por lo que utilizaremos esta característica para delimitar el concepto de línea recta en este contexto y empezaremos con un ejercicio.

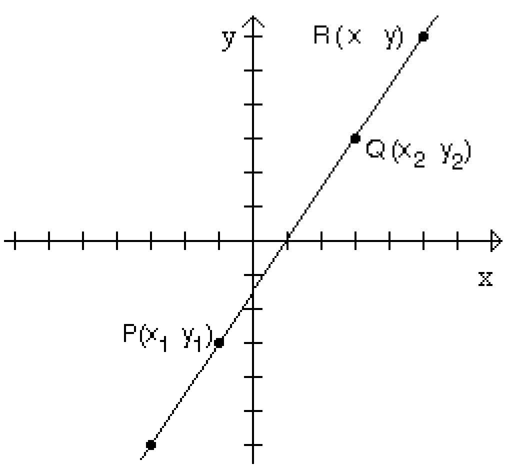
EJERCICIO 1

Instrucciones:
Asocia las columnas, colocando en el recuadro de cada gráfica, el número de la condición que representa y compara los resultados con tus compañeros.

	Condición	Gráfico
1	Pasa por (-3, 2) y (5, -4)	
2	Pasa por (4, – 1) e interseca al eje “y”en y = 2	

3	Pasa por (5, 2) y es paralela al eje “x”	
4	Pasa por el origen y su ángulo de inclinación $\theta = 45^\circ$	
5	Pasa por (3, -4) y tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$	

La recta como lugar geométrico



Existen varias formas de describir la línea recta, una de las definiciones de línea recta que utilizaremos es la que tiene que ver con el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos puntos diferentes P(x_1 y_1) y Q (x_2 y_2) cualesquiera, el valor de la pendiente calculada a partir de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ resulta siempre constante.

Es decir,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ordenando de manera distinta estas igualdades tenemos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

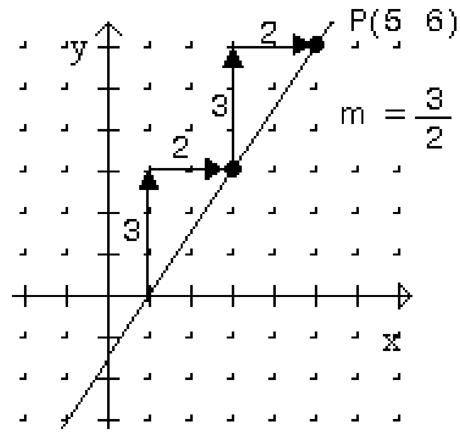
Ecuación de una recta conocidos su pendiente y uno de sus puntos.

Otra ecuación equivalente a las anteriores sería la que llamamos forma **punto-pendiente** y quedaría expresada como:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

que se utiliza para construir la ecuación de una recta si tenemos como datos el valor de la **pendiente** y un **punto** por donde pasa la recta que quedaría perfectamente determinada con estas dos propiedades.

Ejemplo 1: Obtén la ecuación de la recta graficada en la figura de la izquierda.



Datos colectados de la gráfica:

$P(5 \quad 6)$ y $m = \frac{3}{2}$

Se escoge cualquier punto que pertenezca a la recta, en este caso fue el punto P(5 6) y el valor de la pendiente.

Ecuación:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Sustituyendo los valores:

$$y - 6 = \frac{3}{2}(x - 5)$$

$$2\ (y - 6) = 3\ (x - 5\ )$$

$$2y - 12 = 3x - 15$$

$$-3x + 2y - 12 + 15 = 0$$

$$-3x + 2y + 3 = 0$$

$3x - 2y - 3 = 0$ *Ecuación de la recta.*

Ejemplo 2: Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-6 , -2) y tiene pendiente m = - 5

Ecuación:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Sustituyendo los valores obtenemos:

$$y - (-2) = -5[\,x - (-6)]$$

$$y + 2 = -5(\,x + 6)$$

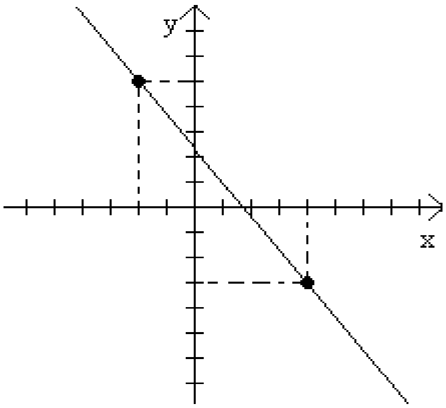
$$y + 2 = -5x - 30$$

$$5x + y + 2 + 30 = 0$$

$5x + y + 32 = 0$ *Ecuación de la recta*

Ecuación de una recta conocidos dos puntos

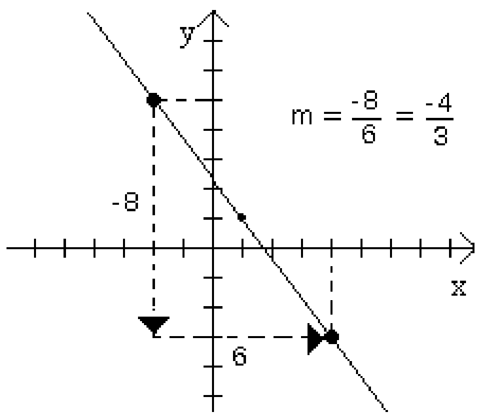
De la misma forma, si los datos conocidos son las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta, podemos obtener su ecuación por diferentes procedimientos como se muestra en el ejemplo:



Ejemplo. Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-2 , 5) y B(4 , - 3).

Primero graficamos los puntos y trazamos la recta.

Segundo, calculamos el valor de la pendiente contando en la gráfica o sustituyendo los valores de las coordenadas en la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular el valor de la pendiente.



Sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{-3 - 5}{4 - (-2)} =$$

$$m = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

Obteniendo el valor de la pendiente de cualquier manera y escogiendo las coordenadas de cualquiera de los dos puntos, construimos la ecuación escogiendo el punto A(-2 5) en este caso:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 5 = \frac{-4}{3}\,(x - (-\,2))$$
$$3(\,y - 5\,) = -4(\,x + 2)$$
$$3y - 15 = -4x - 8$$
$$4x + 3y - 15 + 8 = 0$$
$$4x + 3y - 7 = 0$$

Ecuación de la recta ***en su forma general*** *Ax +By + C = 0*

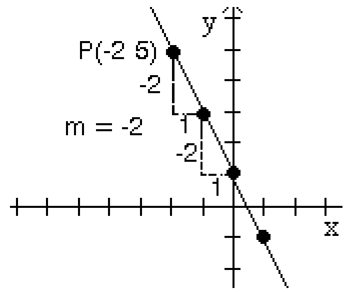
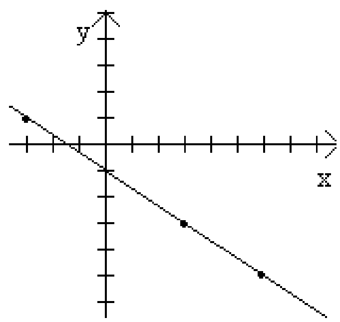
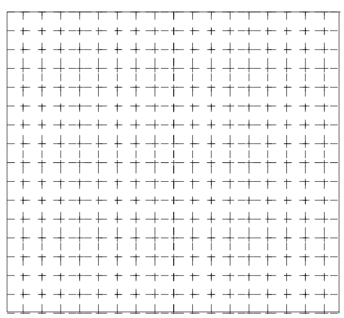
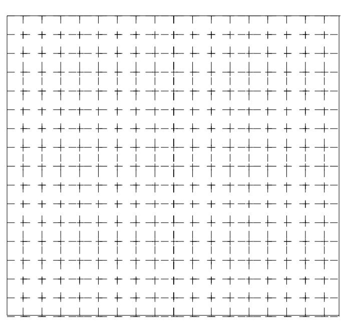
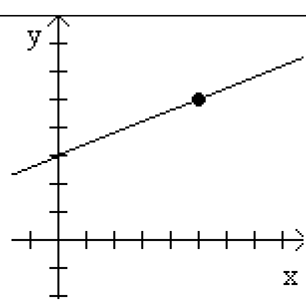
Podrías obtener la ecuación de la recta sustituyendo directamente los valores de las coordenadas en la ecuación:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Inténtalo y comprueba que resulta la misma ecuación de la recta.

EJERCICIO 2

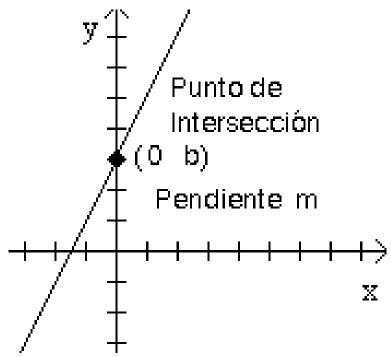
INSTRUCCIONES: Completa la siguiente tabla.

Ejer.	Datos	Gráfica	Ecuación
No.1	Pasa por el punto P(-2 5) y tiene pendiente m = -2		$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ $y - 5 = -2(x - (-2))$ $y - 5 = -2(x + 2)$ $y - 5 = -2x - 4$ $2x + y - 5 + 4 = 0$ $2x + y - 1 = 0$
No. 2			
No. 3	Pasa por los puntos A(-3 -5) y B (1 7)		
No. 4	Pasa por el punto A(0 -3) y tiene pendiente m = -3		
No. 5			

2.1.2. Forma pendiente ordenada en el origen.

Intersección de una recta con el eje Y

Cuando una recta no es vertical interfecta o “corta” al eje Y en un punto al cual lo identificaremos como (0 , b). A “b” se le conoce como **ordenada en el origen,** por ejemplo, en la figura siguiente el punto de intersección de la recta con el eje Y es (0 , 3) y en tal caso decimos que su ordenada en el origen es 3 o que b = 3.



Ecuación de una recta dada su pendiente e intersección con el eje Y

Existen otras maneras de obtener la ecuación de la recta, dependiendo de los datos que sean proporcionados o que puedan ser leídos directamente de su gráfica o de una tabulación.

Por ejemplo, suponemos que conocemos la pendiente m de la recta y que intersecta al eje “y” en cualquier punto que denominaremos “b” entonces tenemos:

Utilizando la fórmula de la ecuación de la recta punto-pendiente tenemos:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - b = m\,(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Forma pendiente ordenada al origen

Donde m es la pendiente de la recta dada y b es la intersección con el eje “y”.

Instrucciones: Completa la siguiente tabla y comenta tus resultados con tus compañeros:

No.	Ecuación de la recta	Valor de la Pendiente	Intersección
1	$y = 3x - 5$	$m = 3$	$b = -5$
2	$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$	$m =$	$b =$
3	$y = -5x - 7$	$m =$	$b =$
4	$Y = \frac{-1}{3}x - 6$	$m =$	$b =$
5		$m = -2$	$b = -5$
6		$m = \frac{-3}{4}$	$b = \frac{1}{5}$
7	$3x + 2y - 8 = 0$	$m =$	$b =$
8	$2x - 5y + 3 = 0$	$m =$	$b =$
9		$m = 7$	$b = -3$
10		$m = \frac{1}{4}$	$b = 2$

EJERCICIO 3

Hasta aquí hemos visto y ejercitado algunas formas de encontrar la ecuación de la recta, ya sea, dados los datos verbalmente o directamente extraídos de la lectura de una gráfica, ahora veremos como encontrar la ecuación de la línea recta a través de los valores de una tabulación en un contexto y en el ejemplo siguiente:

Ejemplo: La distancia medida desde Hermosillo a Navojoa es de 410 Km. Un automóvil que se desplaza a velocidad constante pasa por el Km 25 de la carretera Hermosillo-Navojoa a las 8:00 A.M. y a las 10:00 A.M. se encuentra en el Km 245. ¿A qué horas llegará a Navojoa si mantiene su velocidad constante? ¿A qué horas salió de Hermosillo? ¿Cuántos Km llevará recorridos cuando transcurran 3 Horas?
Con éstos datos podríamos construir una tabla de valores como se muestra:

Tiempo		8:00	9:00	10:00	11:00	
Tiempo t(Horas) transcurrido		0	1	2	3	
Distancia d(Km)	0	25		245		410

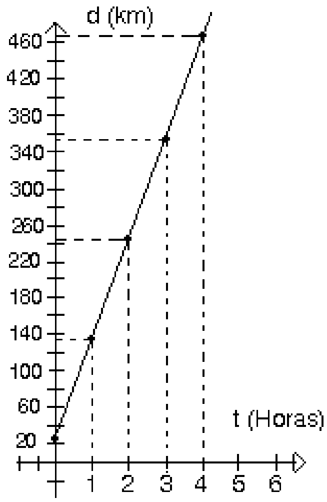
Conociendo que la velocidad es constante y con los valores que nos proporciona el problema, podemos calcular la velocidad de la siguiente forma:

$$V = \frac{245 - 25}{10 - 8} = \frac{220}{2} = \frac{110}{1}$$

¿Qué tipo de fórmula te recuerda lo anterior? ¿Qué propiedad de la recta está representada por la velocidad?

Representa la pendiente de la recta, y con este dato podemos completar los valores de la tabla, podemos contestar las preguntas del problema y realizar la gráfica.

Para calcular los datos faltantes de la tabla, éstos deben guardar la misma proporción.



Tiempo		8:00	9:00	10:00	11:00	11:30
Tiempo t(Horas) transcurrido		**0**	1	**2**	3	3.5
Distancia d(Km)	0	**25**	25 + 110 135	135+110 **245**	245 + 110 355	**410**

Tomamos el 0 tiempo transcurrido en el Km 25 a las 8:00 A.M. porque son los datos que nos proporciona el problema como de partida o inicio.
Con los datos de la tabla se construye la gráfica y observamos que intersecta al eje "d" en b = 25 y su pendiente m = 110, entonces podemos construir su ecuación:

$$y = mx + b$$

$$d = 110t + 25$$

Donde podemos calcular exactamente qué tiempo transcurrió para llegar a Navojoa:

$$410 = 110t + 25$$

$$110t + 25 = 410$$

$$110t = 410 - 25$$

$$110t = 385$$

$$t = \frac{385}{110} = 3.5$$

Y calcular a qué horas llegó a Navojoa. Ahora de la misma manera y con ayuda de tu profesor calcula la hora en que salió de Hermosillo y comenta con tus compañeros qué relación existe entre éstos datos y las propiedades de la recta.

En las siguientes tablas de datos estableceremos si se trata de un comportamiento lineal o no y construiremos su ecuación a partir de la tabla.

Tabla A

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	15	30	45	60	75	90

Tabla B

x	0	2	4	6	8	10	12
y	80	60	40	20	0	-20	-40

Tabla C

x	-5	-1	0	2	5	8	15
y	-11	1	4	10	19	28	49

Observamos primero como están acomodados los datos de las tablas, comparándolas.

En la tabla A tenemos los valores de *x* acomodados de uno en uno y en orden.
¿Qué pasa con los datos de *x* de la tablas B y la tabla C?

Luego en la tabla A tenemos el valor de $x = 0$ coincidiendo con el valor de $y = 0$. ¿Qué pasa con el valor de y en las otras tablas *cuando* $x = 0$? Si estos datos representaran una línea recta estos valores corresponderían a la intersección con el eje *y*.

Podemos observar que los datos de *y* en las tablas A y tabla C van creciendo. ¿Qué pasa con los valores de *y* en la tabla B? ¿Cómo sabemos que estos datos pertenecen a una recta? Entonces para saber si estos datos pertenecen a una recta debemos corroborar que la manera como crecen o decrecen debe ser constante.

Para la tabla A:

Tabla A

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	15	30	45	60	75	90

Se calculan las diferencias entre los valores de “x” y entre los valores de “y”.

Las diferencias entre los valores de “x” son 1 en todas y las diferencias entre los valores de “y” son 15 todas. De aquí observamos que los **cambios** son **constantes** por lo que se trata de una recta que pasa por el origen y su pendiente m = 15, por lo que podemos construir su ecuación quedando:

$$y = 15x$$

Para la tabla B:

Tabla B

x	0	2	4	6	8	10	12
y	80	60	40	20	0	-20	-40

La colocaremos de forma distinta para poder hacer las diferencias entre los datos de “x” y los datos de “y” como se muestra en la figura:

Observa que se trata de la misma tabla pero está acomodada en forma vertical.

	x	y	
	0	80	
2 - 0 = 2	2	60	60 - 80 = -20
4 - 2 = 2	4	40	40 - 60 = -20
6 - 4 = 2	6	20	20 - 40 = -20
8 - 6 = 2	8	0	0 - 20 = -20
10 - 8 = 2	10	-20	-20 - 0 = -20
12 - 8 = 2	12	-40	-40 - (-20) = -20
$\Delta x = 2$			$\Delta y = -20$

Observamos que las **diferencias** son **constantes** (característica de una línea recta) y el valor de la intersección con el eje “y” es cuando x = 0; en este caso el valor de y = 80 corresponde al valor de b. Ahora nos falta calcular el valor de la pendiente para poder construir la ecuación que representa los datos de la tabla y se calcula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-20}{2} = -10$$

La ecuación de la recta queda entonces:

$$y = -10x + 80$$

Para la tabla C:

Tabla C

x	-5	-1	0	2	5	8	15
y	-11	1	4	10	19	28	49

De la misma manera colocaremos la tabla de forma vertical para ver las diferencias:

	x	y	
	-5	-11	
-1 - (-5) = 4			1 - (-11) = 12
	-1	1	
0 - (-1) = 1			4 - 1 = 3
	0	4	
2 - 0 = 2			10 - 4 = 6
	2	10	
5 - 2 = 3			19 - 10 = 9
	5	19	
8 - 5 = 3			28 - 19 = 9
	8	28	
15 - 8 = 7			49 - 28 = 21
	15	49	

Al observar las diferencias podríamos concluir que estos datos no tienen un comportamiento lineal, pero anteriormente ya habíamos notado que los valores no son sucesivos por lo que tenemos que comprobar si el **cociente de sus diferencias** se mantiene **constante**, si sucede, estos datos corresponden a una línea recta, verificando:

1) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12}{4} = 3$

2) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$

3) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3$

4) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{3} = 3$

5) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{3} = 3$

6) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21}{7} = 3$

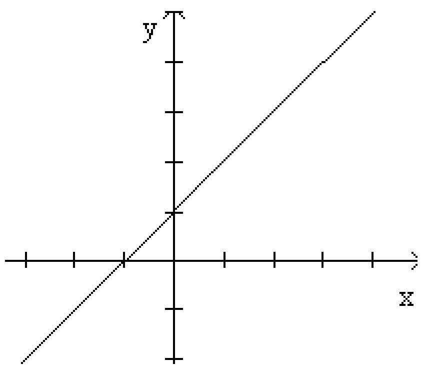
Podemos comprobar que es la misma pendiente, si los datos se comportan linealmente y la intersección con el eje “y” es 4, entonces la ecuación que representa a los datos queda:

$$y = 3x + 4$$

¿De qué otra forma pudieras encontrar la ecuación de la recta sin graficarla, conociendo los datos de una tabla y sospechando que corresponde a una línea recta?

Instrucciones: En la tabla siguiente encuentra la ecuación de la recta dadas las condiciones.

EJERCICIO 4

<table>
<tr><th>No.</th><th>Datos, gráfica o tabla</th><th>Ecuación</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><td>X</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>21</td><td>17</td><td>13</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td><table><tr><td>X</td><td>-3</td><td>-2</td><td>0</td><td>5</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>Y</td><td>-8</td><td>-5</td><td>1</td><td>16</td><td>28</td><td>31</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td></tr><tr><td>Y</td><td>-5</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Tiene m = -3 y su intersección es y = -2</td><td></td></tr>
</table>

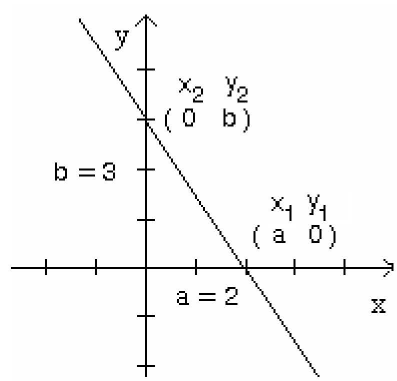
TAREA 1

Página 89.

2.1.3. Forma simétrica.

Intersecciones de una recta con los ejes coordenados

Cuando una recta no pasa por el origen y no es horizontal entonces intersecta a los ejes coordenados en dos puntos (a , 0) y (0 , b), decimos que “a” es la **abscisa en el origen** y que “b” es su ordenada en el origen. En la figura de enseguida podemos ver que a = 2 y que b =3.



Ecuación de una recta conocidas sus intersecciones con los ejes

La forma simétrica de la ecuación de la recta, es aquella cuya característica es que podemos localizar las intersecciones de ésta con los ejes (a , 0) y (0, b).

Están localizados dos puntos, entonces sustituyendo en la fórmula estas coordenadas y desarrollando tenemos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}$$

$$-ay=b(x-a)$$

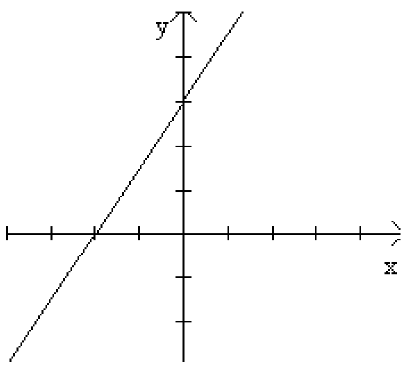
$$-ay=bx-ab$$

$$-bx-ay=-ab$$

$$\frac{-bx}{-ab}-\frac{ay}{-ab}=\frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Forma simétrica de la ecuación de la recta



Ejemplo: Dada la gráfica encontrar la ecuación de la recta:

En la gráfica, b = 3 y el valor de a = - 2, sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$$

Transformando esta ecuación a una equivalente:

$$\frac{3x-2y}{-6}=1$$

$$3x-2y=-6$$

$$3x-2y+6=0$$

Ecuación de la recta en su forma general

Arriba encontramos, la ecuación de la recta en su forma simétrica, a partir de la gráfica dada; ahora construiremos la forma simétrica a partir de la ecuación general de la recta, ¿cómo podemos darle un tratamiento algebraico para encontrar su forma simétrica y saber los valores de a y b que son las intersecciones con los ejes *"x"* y *"y"* respectivamente? Observemos el ejemplo:

Para saber más y enriquecer el tema, visita el sitio www.cnice.mecd.es/descartes/

Ejemplo: Dada la ecuación de la recta $3x - 5y + 15 = 0$, transfórmala a su forma simétrica y encuentra los valores de a y b para graficarla.

$$3x - 5y + 15 = 0$$
$$3x - 5y = -15$$

Primero obtenemos el 1 de la fórmula dividiendo la ecuación entre -15

$$\frac{3x}{-15} - \frac{5y}{-15} = \frac{-15}{-15}$$

Reacomodando las fracciones

$$\frac{x}{\frac{-15}{3}} + \frac{y}{\frac{-15}{-5}} = 1$$

Efectuando operaciones

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$$

De donde podemos encontrar el valor de a = -5 y b= 3, es decir, las intersecciones con los ejes y fácilmente graficar.

Instrucciones: Con ayuda de tu profesor, completa la tabla siguiente con las transformaciones de las ecuaciones que hagan falta y comenten los resultados.

EJERCICIO 5

No.	Forma General $Ax + By + C = 0$	Forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$	Forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
1	$2x - 3y - 6 = 0$		
2		$y = \frac{-5}{2}x + 5$	
3			$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
4		$y = \frac{4}{3}x + 4$	
5	$X - 2y - 5 = 0$		

2.1.4. Forma general de la ecuación de la recta.

Conversión de la ecuación de una recta a la forma general

Anteriormente hemos manipulado las formas de la ecuación de la recta y la **forma general** está denotada por la ecuación,

$$Ax + By + C = 0$$

Esta ecuación puede ser modificada de la misma forma que las anteriores y obtener así los elementos de la recta.

Para encontrar la forma **pendiente ordenada al origen** se procede como sigue:

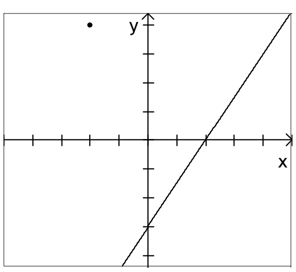
$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Así los elementos de la recta como la pendiente y su intersección con el eje "y" esta dada por las ecuaciones:

$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{y la intersección} \quad b = -\frac{C}{B}$$

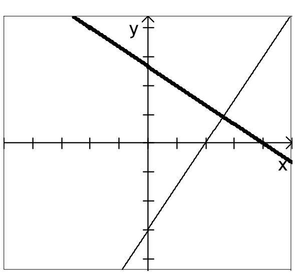
Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2 4) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x - 2y - 5 = 0$.

La recta $3x - 2y - 6 = 0$ tiene pendiente $m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$ y su intersección $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-6}{-2} = -3$ graficando, tenemos la recta y el punto por donde pasará la perpendicular a ésta, como aparece en la figura.



Para encontrar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto (-2 4) necesitamos el valor de su pendiente, que se calcula tomando el recíproco y de signo contrario del valor de la pendiente de la recta graficada, como lo vimos en la primera unidad ¿recuerdas?

$$m = \frac{3}{2} \quad \text{entonces el valor de la pendiente de la recta } \perp \text{ es } m = -\frac{2}{3}$$



Sustituyendo en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos la ecuación de la recta perpendicular de la siguiente forma:

$$y - 4 = -\frac{2}{3}(x - (-2))$$
$$3(y - 4) = -2(x + 2)$$
$$3y - 12 = -2x - 4$$
$$2x + 3y - 12 + 4 = 0$$
$$2x + 3y - 8 = 0$$

Para transformar la ecuación de la recta en su forma simétrica, a partir de la ecuación general y encontrar las intersecciones con los ejes tenemos:

$$Ax + By + C = 0 \text{ con } C \neq 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax+By}{-C} = \frac{-C}{-C}$$

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Comparando con la forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

tenemos que $\qquad a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Ejemplo: Encontrar las intersecciones con los ejes de coordenadas de la recta $4x + 3y - 12 = 0$ y expresar la ecuación en su forma simétrica.

En este caso $A = 4$, $B = 3$ y $C = -12$, por lo tanto:

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{-12}{4} = 3 \quad \text{y}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{-12}{3} = 4$$

su ecuación en la forma simétrica es:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 .$$

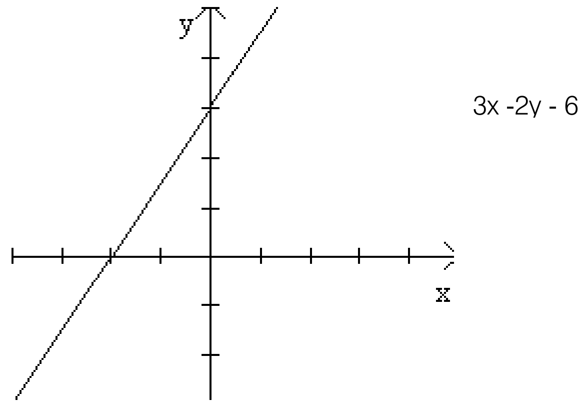
La línea recta y la ecuación general de primer grado.

Hasta aquí hemos visto que toda recta queda representada por una ecuación de primer grado de la forma general $Ax + By + C = 0$. Pero, ¿se cumple lo contrario?, es decir ¿toda ecuación de primer grado de dicha forma representa una recta?

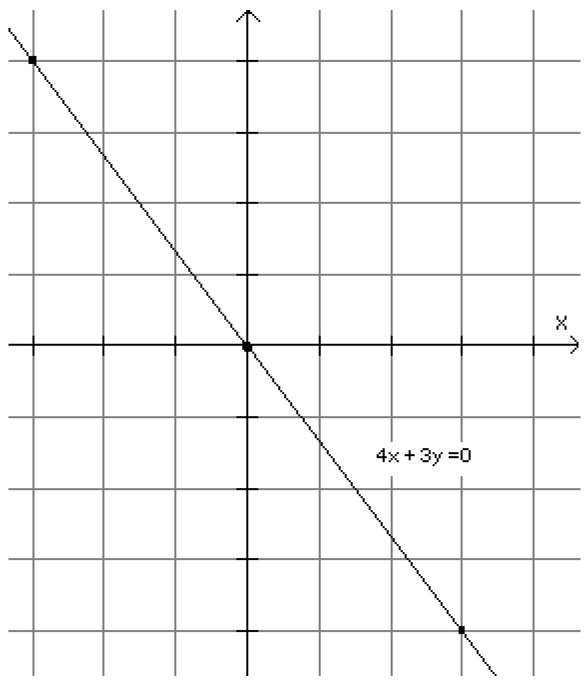
Resulta fácil comprobar que así es, o sea que toda ecuación de primer grado de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A y B no sean los dos cero, se puede representar gráficamente con una recta.

El tipo de recta que se obtiene depende de cuales sean los valores de A, B y C:

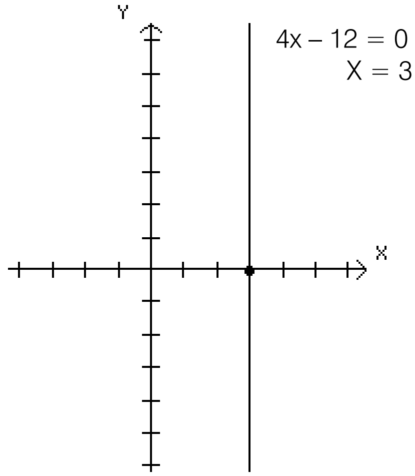
Si A, B y C son diferente de cero ($Ax + By + C = 0$), ejemplo $3x - 2y + 6 = 0$, se obtiene una recta oblicua que no pasa por el origen.



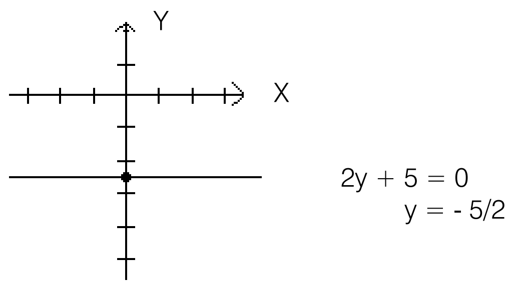
Si A y B son diferentes de cero pero C = 0 ($Ax + By = 0$), ejemplo $4x + 3y = 0$, se obtiene una recta oblicua que pasa por el origen.



Si B = 0 (Ax + C = 0), ejemplo $4x - 12 = 0$, se obtiene una recta vertical.



Si A= 0 (By + C = 0), ejemplo $2y + 5 = 0$, se obtiene una recta horizontal.



EJERCICIO 6

Instrucciones: Dada cada una de las situaciones siguientes, grafica y encuentra la ecuación de la recta si:

a) Pasa por el punto A (-1 3) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 3y + 9 = 0$.
b) Pasa por el punto C(-4 1) y es perpendicular al segmento formado por los puntos A(1 -2) y B(2 5)
c) Es mediatriz del segmento formado por los puntos A(-1,-5) y B(3, -3)
d) Pasa por el punto A(-2 6) y es paralela a la recta cuya ecuación es $3x - 2y + 8 = 0$
e) Pasa por el origen y es paralela a la recta $2x + y + 5 = 0$

II. Transforma las siguientes ecuaciones a su forma general:

a) $y - 3 = 2(x + 5)$ b) $y = -3x + 4$ c) $y = \frac{3}{4}x$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$

III. Indica qué tipo de recta se obtiene y grafica cada una de las ecuaciones:

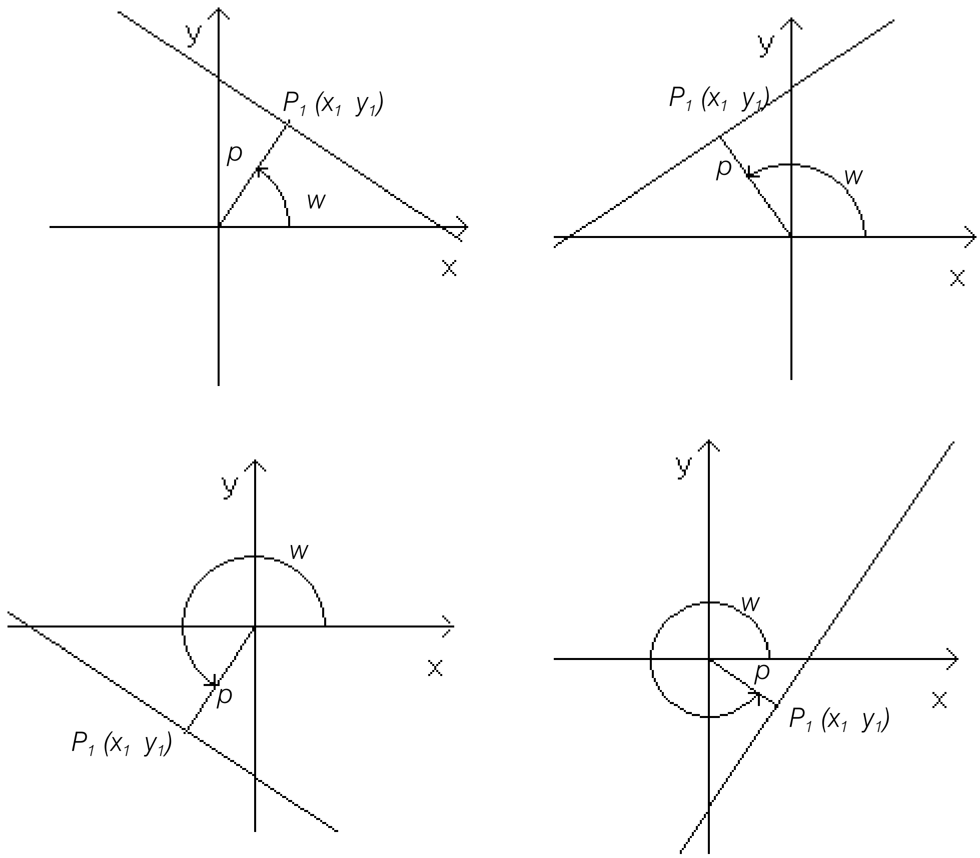
a) $2x + 5y + 10 = 0$ b) $3x - 5y = 0$ c) $x + 2 = 0$ d) $2y - 7 = 0$.

TAREA 2

Página 91.

2.1.5. Forma normal de la ecuación de la recta.

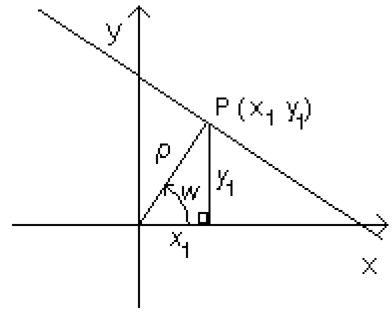
Consideremos ahora las siguientes rectas graficadas en el plano cartesiano y un segmento perpendicular, a éstas con uno de sus extremos situado siempre en el origen, de longitud *p* y el ángulo positivo denominado *w*.



De acuerdo a esto la longitud p siempre es positiva y la variación de los valores del ángulo w están en el rango de:

$$0° \le w \le 360°$$

Para encontrar la ecuación de la recta en su forma normal procederemos sustituyendo valores en la ecuación $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$ de la siguiente forma:



$$\cos w = \frac{x_1}{p} \qquad x_1 = p\cos w$$

$$\operatorname{sen} w = \frac{y_1}{p} \qquad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

La pendiente de la recta estará dada por el recíproco y de signo contrario del valor de la pendiente del segmento p.

$$m_p = \tan w$$

$$m = -\frac{1}{\tan w} \quad \text{esto equivale a} \quad m = -\cot w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}$$

Sustituyendo tenemos:

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}\left(x - p\cos w\right)$$

$$y\operatorname{sen} w - p\operatorname{sen}^2 w = -\cos w\left(x - p\cos w\right)$$

$$y\operatorname{sen} w - p\operatorname{sen}^2 w = -x\cos w + p\cos^2 w$$

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p(\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w) = 0$$

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0$$

Forma normal de la ecuación de la recta.

Obtención de la forma normal a partir de la general.

La forma normal de la ecuación de la recta es útil para algunos problemas, sin embargo, la ecuación de la recta usualmente la tenemos en su forma general, entonces, es importante conocer la transformación de la general a la normal que a continuación se describe:

$$Ax + By + C = 0$$

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0$$

Y si ambas corresponden a la misma recta, sus coeficientes correspondientes deben ser proporcionales, por lo tanto:

$$\cos w = kA$$

$$\operatorname{sen} w = kB$$

$$-p = kC$$

Elevando al cuadrado y sumando las dos primeras ecuaciones tenemos:

$$\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = k^2\,(A^2 + B^2)$$

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Sustituyendo este valor de k en cada una de las ecuaciones tenemos la forma normal de la ecuación de una recta transformada de su forma general a la normal de la siguiente forma:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Ecuación general de la recta transformada a su forma normal

Observando los radicales $r=\pm\sqrt{A^2+B^2}$ nos damos cuenta del doble signo que precede al radical y se escoge como sigue:

a) Si $C\neq 0$, r es de signo contrario a C.
b) Si $C = 0$ y $B\neq 0$, r y B tienen el mismo signo, es decir, el radical es del mismo signo que B.
c) Si $C = 0$ y $B = 0$, r y A tienen el mismo signo.

Normal a una recta y distancia al origen.

Aplicando lo anterior, observaremos que calculando el valor de p tenemos la distancia al origen de una recta, denominada normal.

Ejemplo: La ecuación de una recta es $3x - 4y - 5 = 0$. Encontrar la distancia de ésta recta al origen, es decir, el valor de p y el valor del ángulo w.

Para esta ecuación corresponde:

$A = 3$ $B = -4$ y $C = -5$ calculando el valor del radical $r=\pm\sqrt{A^2+B^2}$

$$r=\pm\sqrt{3^2+(-4)^2}=\pm\sqrt{9+16}=\pm\sqrt{25}$$

Como $C = -5$ entonces el signo de la raíz será el contrario, es decir, positivo

$$r = 5$$

Sustituyendo en la fórmula $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$

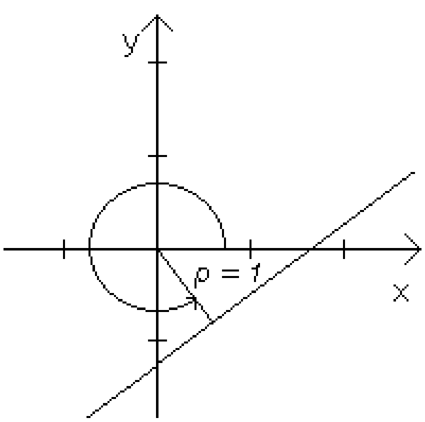
$$\frac{3}{5}x + \frac{-4}{5}y + \frac{-5}{5}=0 \text{ Forma Normal, donde:}$$

$$\frac{3}{5}=\cos w,\quad \frac{-4}{5}=\operatorname{sen} w,\quad y\quad p=1$$

El $\cos w$ es positivo y el $\operatorname{sen} w$ es negativo, por lo que w está en el cuarto cuadrante.

$$\cos w=\frac{3}{5}$$

$$w=\cos^{-1}\frac{3}{5}$$



$w = 53° 7' 48.37''$ Al graficar y por los signos obtenidos en la ecuación sabemos que el valor de w corresponde a un ángulo del cuarto cuadrante que se calcula de la siguiente forma:

$$w = 360° - 53° 7' 48.37''$$

$$w = 306° 52' 11.6''$$

$$p = 1$$

EJERCICIO 7

Instrucciones: Resuelve en equipo lo que se te pide:

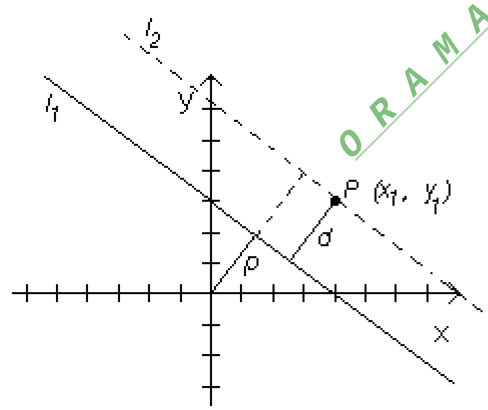
1) Construye la forma normal de la ecuación de la recta, a partir de su ecuación general encontrando el valor de *p* y *w* y realizando su gráfica.
   a) $12x - 5y - 52 = 0$
   b) $3x - 4y + 12 = 0$
   c) $3x - 4y - 24 = 0$
   d) $x - y - 4 = 0$

2) Encuentra la distancia al origen de las rectas:
   a) $5x - 7y - 11 = 0$
   b) $3x - 4y + 25 = 0$
   c) $3x + 4y - 10 = 0$

3) Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio igual a 5; si el punto de tangencia es (-3, -4), determina la ecuación en su forma normal.
4) Encuentra la ecuación de la recta cuya distancia al origen es 5 y que pasa por el punto A(1, 7). (Doble solución)

2.1.6. Distancia entre un punto y una recta.

Una de las aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta, es el cálculo de la distancia de un punto a una recta, observa el dibujo:



La forma normal de la recta l_1 está dada por:

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}\,w - p = 0$$

mientras que la forma normal de la recta l_2 está dada por:

$$x_1\cos w + y_1\,\mathrm{sen}\,w - (p + d) = 0$$

$$d = \left| x_1\cos w + y_1\,\mathrm{sen}\,w - p \right|$$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

EJERCICIO 8

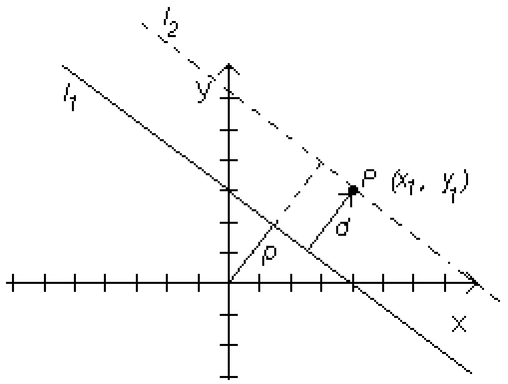
Instrucciones: Aplicando la fórmula anterior resuelve los siguientes ejercicios individualmente.

a) Encuentra la distancia del punto A(-3, 5) a la recta $3x - 2y - 8 = 0$
b) Encuentra el valor del radio de una circunferencia, cuyo centro es el punto C (-2, 4) y es tangente a la recta $x - 4y + 6 = 0$
c) Encuentra el valor de la coordenada del punto P(x, 5) si la distancia a la recta cuya ecuación es $3x + 4y - 6 = 0$ es de 4 unidades.

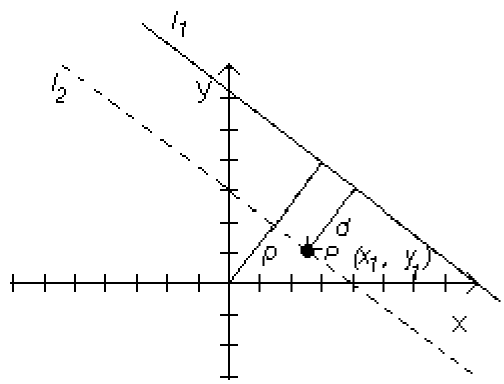
Distancia dirigida y no dirigida de una recta a un punto.

La distancia dirigida tiene que ver con el sentido y el signo, que dependen de la posición en el plano donde se encuentren la recta y el punto del cual se calculará la distancia a la recta dada.

Ejemplo: Observa en la figura las posiciones de la recta y el punto, y como se considera el sentido positivo y negativo de la distancia dirigida:



Distancia con sentido positivo

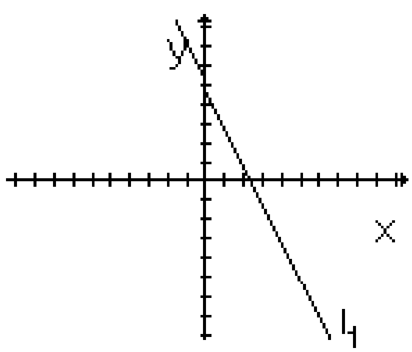


Distancia con sentido negativo

La distancia no dirigida es cuando tomamos su valor absoluto sin tomar en cuenta su sentido.

Distancia entre rectas paralelas

Otra de las aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta, es el cálculo de la distancia entre dos rectas paralelas como se muestra en el ejemplo:



Calcular la distancia entre dos rectas paralelas cuyas ecuaciones son:

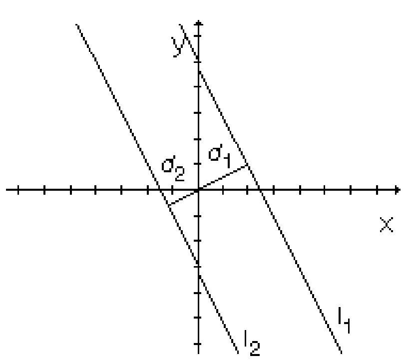
$$2x + y - 5 = 0 \quad y \quad 2x + y + 3 = 0$$

Primero, procederemos a graficar estas rectas con cualquiera de los procedimientos vistos anteriormente, para observar la separación y posición en el plano de las mismas.

Consideraremos como recta l_1 a la recta cuya ecuación es $2x + y - 5 = 0$ que transformada a su forma "pendiente ordenada al origen" nos queda:

$$Y = -2x + 5$$

De donde $m = -2$ y la intersección con el eje "y" es $(0, 5)$ graficada en la figura de la izquierda.



Luego de la misma manera consideramos l_2 a la recta cuya ecuación es $2x + y + 3 = 0$ que transformada a su forma "pendiente ordenada al origen" nos queda:

$$Y = -2x - 3 \text{ graficando:}$$

Podemos observar en la figura que las distancias al origen, d_1 y d_2 corresponden al valor del parámetro p de la forma normal de la ecuación de la recta, por lo que la distancia entre las dos paralelas sería, en este caso, la suma de las dos distancias, es decir, la suma de los valores de p:

Transformaremos las ecuaciones de las rectas a su forma normal, para calcular los valores de p en cada una, para la ecuación $2x + y - 5 = 0$ su forma normal :

$$\frac{2}{\pm\sqrt{2^2+1^2}}x + \frac{1}{\pm\sqrt{2^2+1^2}}y + \frac{-5}{\pm\sqrt{2^2+1^2}} = 0$$

$$p_1 = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Para la recta l_2 cuya ecuación es $2x + y + 3 = 0$ transformada a su forma normal:

$$\frac{2}{\pm\sqrt{2^2+1^2}}x + \frac{1}{\pm\sqrt{2^2+1^2}}y + \frac{3}{\pm\sqrt{2^2+1^2}} = 0$$

$$p_2 = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

Sumando ambas tenemos entonces la distancia entre las dos rectas paralelas:

$$p_1 + p_2 = d = \sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

Nota: Pregunta a tu Profesor porqué es importante saber la posición de las paralelas para calcular la distancia entre ellas a partir de la forma normal de la recta. Recuerda que la posición de las rectas la puedes determinar con los signos de las funciones sin necesidad de graficarlas.

TAREA 3

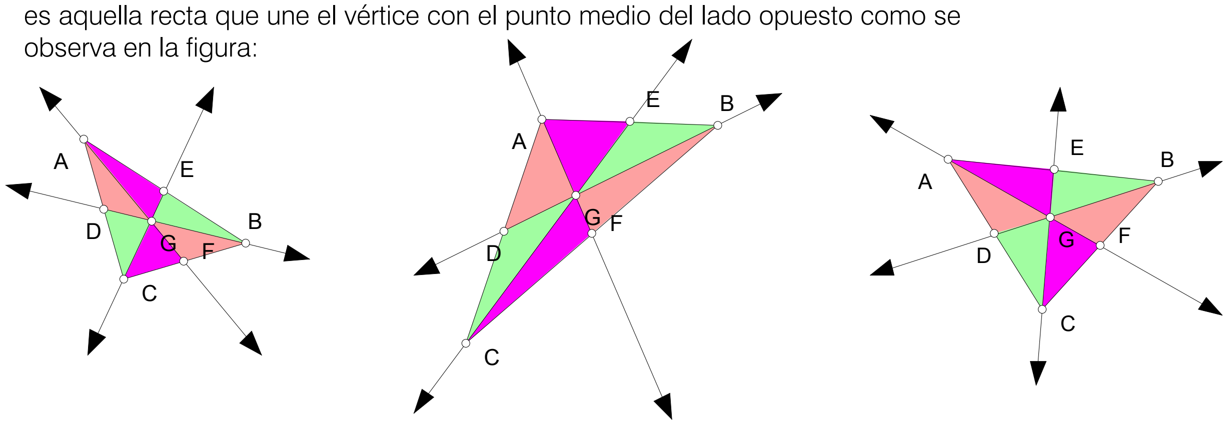
Página 93.

2.2. ECUACIONES DE RECTAS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

Las rectas como la mediatriz, bisectriz, mediana y altura en un triángulo son rectas muy importantes, porque describen lugares geométricos, que éstos a su vez pueden servir de modelo para la resolución de problemas o situaciones de la vida real.

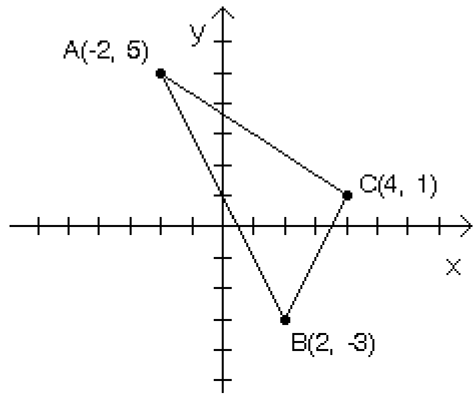
2.2.1. Medianas.

Recordando lo estudiado en Matemáticas 2 de la recta mediana en un triángulo, es aquella recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto como se observa en la figura:



Ahora construiremos la ecuación de estas medianas situándolas en un plano cartesiano, y para esto resolveremos el siguiente ejemplo:

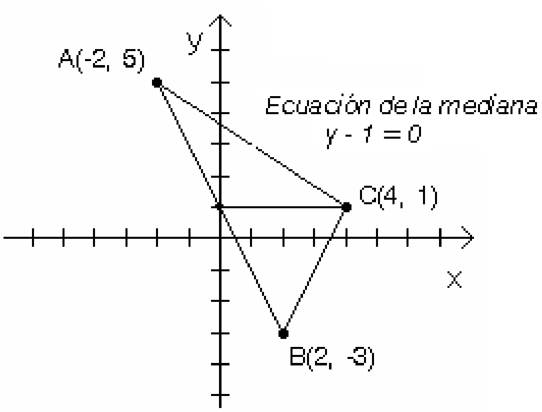
Dado el triángulo formado por los puntos A(-2, 5) y B(2, -3) y C(4, 1) encontrar las ecuaciones de sus medianas.



Primero calculamos los puntos medios de cada uno de los segmentos AB, BC y CA.

Las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$X_m = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \qquad y_m = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



La recta mediana pasa por este punto medio y el vértice C, obteniéndose su ecuación, sustituyendo los valores en la fórmula $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ de la siguiente forma:

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{1-1}{4-0}$$

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{0}{2}$$

$$2(y - 1) = 0(x - 0)$$

$$2y - 2 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

Ahora la ecuación de la mediana que va del punto medio del segmento BC al vértice opuesto A(-2, 5).

Las coordenadas del punto medio del segmento BC son:

$$x_m = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

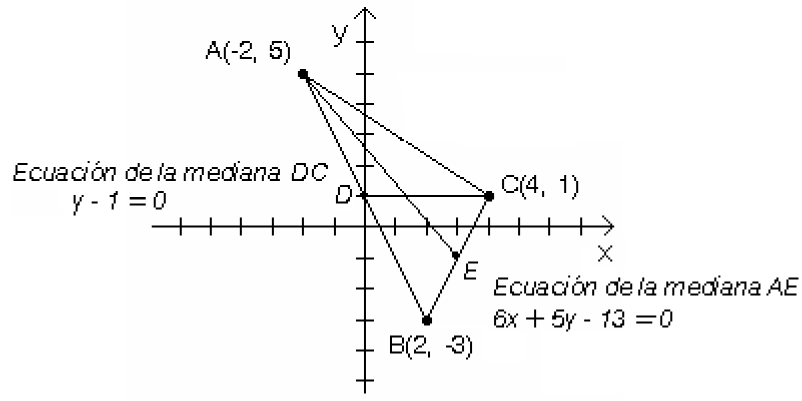
La recta mediana pasa por este punto medio y el vértice A, obteniéndose su ecuación de la misma forma que la anterior sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y+1}{x-3}=\frac{5+1}{-2-3}$$

$$\frac{y+1}{x-3}=\frac{6}{-5}$$

$$-5(y+1)=6(x-3)$$
$$-5y-5=6x-18$$
$$-6x-5y-5+18=0$$
$$6x+5y-13=0$$



Y de la misma manera se obtiene la ecuación de la tercera mediana, que pasaría por el punto medio del lado CA y el vértice opuesto B.

Ahora recuerda que la intersección de éstas rectas es un punto muy importante porque es considerado el centro de gravedad y se denomina así, centro de gravedad o, gravicentro, centroide, baricentro.

Como consecuencia de lo anterior, las áreas de cada uno de los triángulos opuestos formados por esta línea, son de igual magnitud.

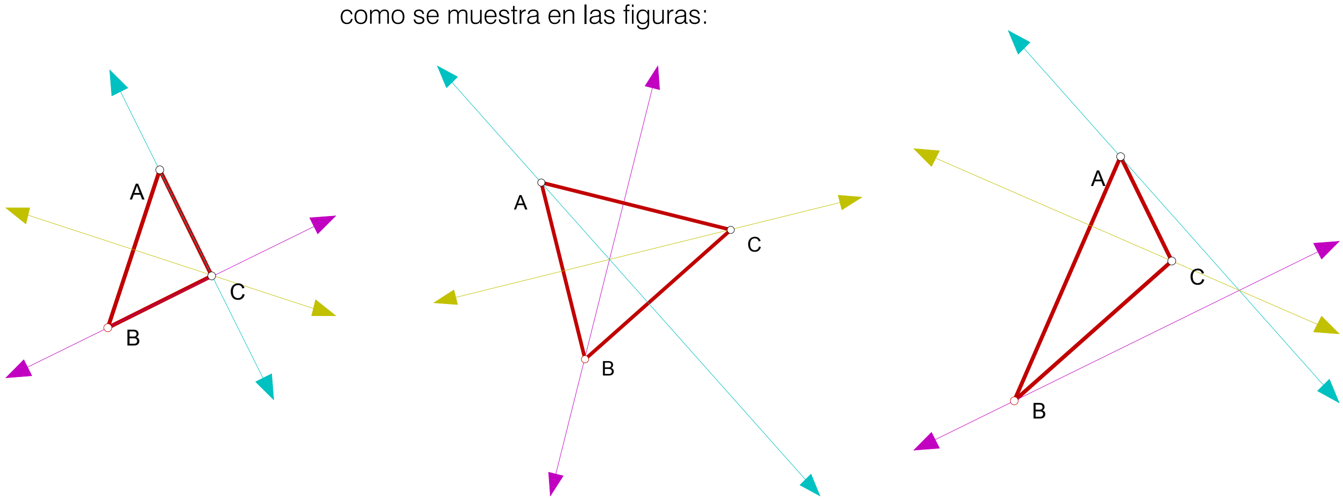
EJERCICIO 9

Instrucciones: En equipo realiza los siguientes ejercicios:

1) Dadas la ecuaciones de las medianas del triángulo del ejemplo anterior, las rectas $y-1=0$ y $6x+5y-13=0$ calcula las coordenadas del baricentro del triángulo.
2) Encuentra las ecuaciones de las rectas medianas del triángulo formado por las coordenadas A (-2, 5), B (4, -3) y C (6, 5)

2.2.2. Alturas

De la misma manera recordaremos la altura en un triángulo, que es la recta perpendicular al lado del triángulo que pasa por cada uno de los vértices opuestos. Estas rectas se cruzan en un punto llamado ortocentro, que puede localizarse dentro, fuera o en uno de los vértices del triángulo según su forma, como se muestra en las figuras:



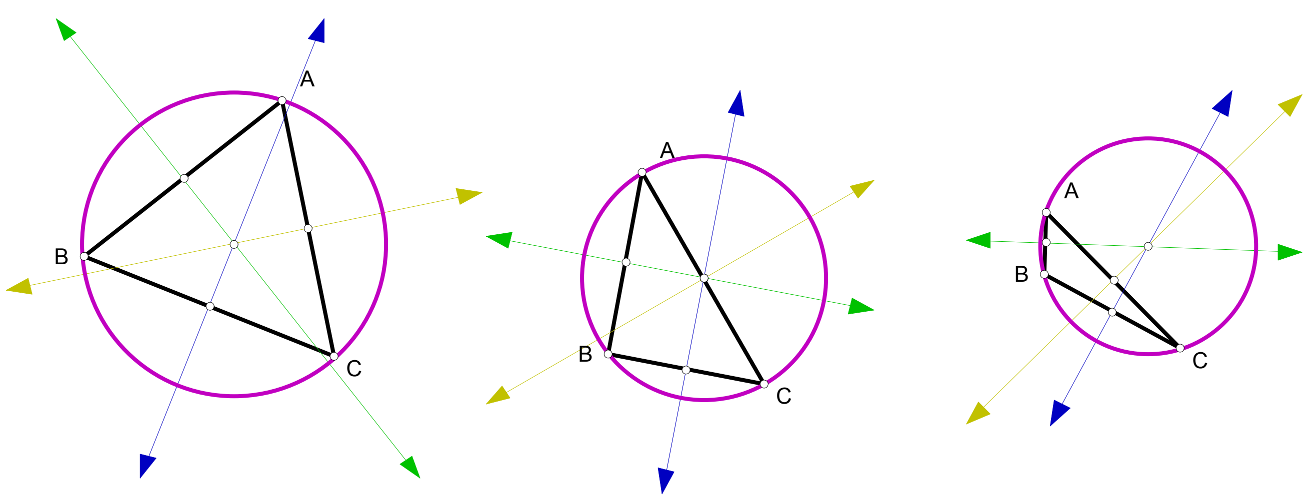
EJERCICIO 10

Instrucciones: Con ayuda de tu maestro y en equipo realiza los siguientes ejercicios:

1) Encuentra las ecuaciones de las alturas del triángulo formado por las coordenadas A(-2, -4), B(-1, 6) y C (3, -1)
2) Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo $x - y + 7 = 0$, $x + y + 1 = 0$ y $5x + 2y - 7 = 0$ encuentra las ecuaciones de sus alturas y las coordenadas del ortocentro.

2.2.3. Mediatrices

Igualmente recordaremos la mediatriz como la recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento, en este caso de cada lado del triángulo y cuyo punto de cruce es denominada circuncentro, que puede localizarse dentro, fuera o en la mitad de un lado del triángulo, según su forma. Observa las figuras.



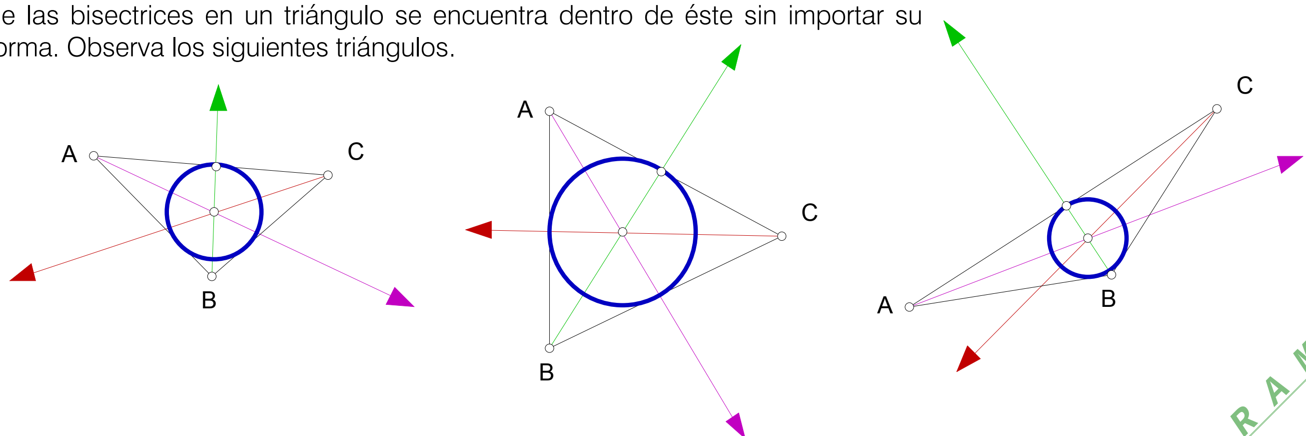
EJERCICIO 11

Instrucciones: Con ayuda de tu maestro y en equipo realiza los siguientes ejercicios:

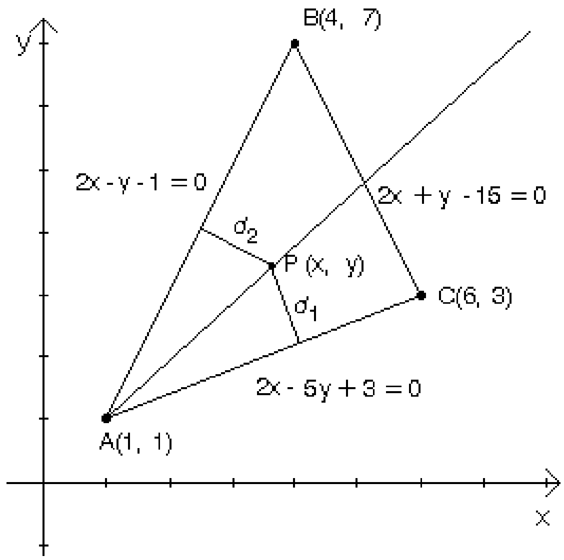
1) Encuentra las ecuaciones de las mediatrices del triángulo formado por las coordenadas A(-2, -4), B(-1, 6) y C (3, -1)
2) Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo $x - y + 7 = 0$, $x + y + 1 = 0$ y $5x + 2y - 7 = 0$ encuentra las ecuaciones de sus mediatrices y las coordenadas del circuncentro.

2.2.4. Bisectrices

Por último recordaremos la bisectriz de un triángulo, como la recta que divide en dos partes iguales a cada uno de los ángulos del triángulo pasando por cada uno de sus vértices respectivamente. El incentro que es el punto de intersección de las bisectrices en un triángulo se encuentra dentro de éste sin importar su forma. Observa los siguientes triángulos.



Construiremos las ecuaciones de las bisectrices, ubicando el triángulo formado por los puntos A(1, 1), B(4, 7) y C(6, 3) en el plano cartesiano.
Primero graficaremos en el plano y encontraremos las ecuaciones de los lados del triángulo que ya están escritas en la figura:



Para saber más y enriquecer el tema, visita el sitio http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Geometria_afin_analitica_plano_lugares_geometricos/Geometria_8.htm

Siguiendo la definición de la recta bisectriz, el punto P(x, y) que observas en la figura y que pertenece a la bisectriz debe estar a la misma distancia de las dos rectas de los lados del triángulo, pero tomando en consideración las posiciones de las rectas y el punto tenemos que:

$$d_1 = d_2$$

Por lo que la ecuación de la recta bisectriz queda:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}$$

$$\frac{2x - 5y + 3}{-\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{2x - y - 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{2x - 5y + 3}{-\sqrt{29}} = \frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}(2x - 5y + 3) = -\sqrt{29}\,(2x - y - 1)$$

$$2\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}y + 3\sqrt{5} = -2\sqrt{29}x + \sqrt{29}\,y + \sqrt{29}$$

$$(2\sqrt{5} + 2\sqrt{29})\,x - (5\sqrt{5} + \sqrt{29})\,y + 3\sqrt{5} - \sqrt{29} = 0$$

Ecuación de la bisectriz

Y de la misma manera podemos construir las ecuaciones de las otras bisectrices.

EJERCICIO 12

Instrucciones: Con ayuda de tu profesor encuentra las ecuaciones de las bisectrices en el siguiente triángulo.

1) Triángulo formado por los vértices A(-2, 3) B(4, -1) y C(5, 5)

TAREA 4

Página 95.

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.

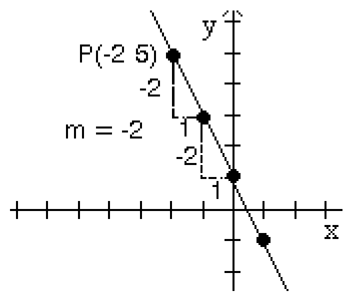
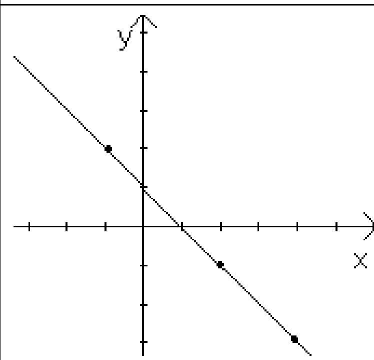
TAREA 1

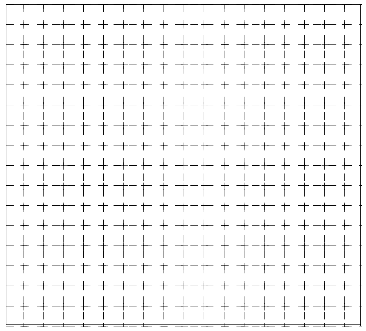
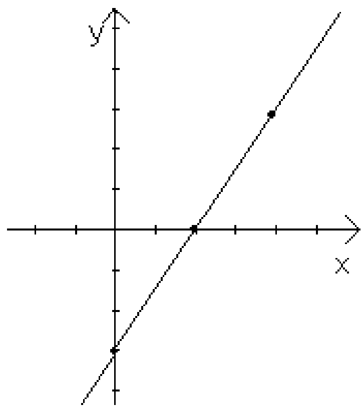
Nombre ____

No. de lista _______________ Grupo ___________________________

Turno _________________________________ Fecha _______________

INSTRUCCIONES: *La primera fila de la siguiente tabla, tiene un ejercicio completo en cuanto a datos, gráfica y ecuación, completa la tabla obteniendo lo que haga falta en cada caso.*

Ejer.	Datos	Gráfica	Ecuación
No.1	Pasa por el punto P(-2 5) y tiene pendiente m = -2		$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ $y - 5 = -2(x - (-2))$ $y - 5 = -2(x + 2)$ $y - 5 = -2x - 4$ $2x + y - 5 + 4 = 0$ $2x + y - 1 = 0$
No. 2			
No. 3	Pasa por los puntos A(-4, 3) y B(2, -5)		
No. 4	Pasa por el punto A(0 -3) y tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$		

<table>
<tr>
<td>No. 5</td>
<td>
<table>
<tr><td>X</td><td>-2</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>7</td><td>3</td><td>-3</td><td>-7</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>No. 6</td>
<td>
<table>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>No. 7</td>
<td></td>
<td></td>
<td>$3x - 2y - 6 = 0$</td>
</tr>
</table>

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre____

No. de lista ________________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Realiza lo que se pide en cada caso y entrega los resultados a tu profesor.

I. Obtén las ecuaciones de las siguientes rectas y grafica cada una de ellas:
1. Pasa por el punto A(0, 5) y tiene pendiente m = -4.
2. Pasa por el punto B(2, 4) y tiene pendiente m = ¾.
3. Pasa por los puntos C(-2, -3) y D(4, 5).
4. Pasa por los puntos E(-3, 5) y F(6, -4).
5. Cuya abscisa al origen es 6 y cuya ordenada al origen –3.
6. Intersecta al eje “x” en –5 y al eje “y” en 8.
7. Cuya pendiente es $m = -\frac{3}{2}$ y la ordenada al origen es 8.
8. Con ángulo de inclinación igual a 45° y la ordenada al origen es $\frac{5}{6}$.
9. Pasa por el punto F(5, 4) y es paralela a la recta cuya ecuación es 2x –3y + 6 = 0.
10. Pasa por el punto G(-2, 3) y es paralela a la recta determinada por los puntos H(5, 3) y J(-4, 6).
11. Pasa por el punto K(-3, 2) y es perpendicular a la recta 5x –3y –5 = 0.
12. Pasa por el L(-3, -4) y es perpendicular a la a recta que une los puntos M(4, -2) y N(8, 2).
13. Es mediatriz del segmento formado por A(-2, 5) y B(6, - 3).

II. Obtén lo que se te indica en cada recta y grafica:
1. Las intersecciones con los ejes coordenados de la recta cuya ecuación es 3x + 2y – 6 = 0.
2. La ordenada y la abscisa al origen de la recta cuya ecuación es 3x –2y + 12 = 0.
3. La pendiente y la ordenada al origen de la recta 5x – y + 12 = 0.
4. La pendiente y la ordenada al origen de la recta 10x – 15y – 24 = 0.

III. Indica si los siguientes datos pertenecen a una recta.

1.

X	-2	4	5	10	12
Y	112	-22	-7	-67	-98

2.

X	-2	-1	0	1	2
Y	-18	-14	-10	-6	-2

3.

X	2	4	6	8	10
Y	12	24	48	96	192

IV. Trazar la gráfica de cada una de las siguientes rectas:
a) 4x – 6y + 12 = 0 b) 4y + 11 = 0 c) y = -2x d) x + 5 = 0.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 3

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno____________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: Realiza en cada caso lo que se pide y entrega el reporte a tu profesor.

1) Construye la forma normal de la ecuación de la recta, a partir de su ecuación general encontrando el valor de p y w, realiza su gráfica.
   a) $x - 5y - 5 = 0$
   b) $3x - 4y + 10 = 0$
   c) $3x - 5y - 24 = 0$
   d) $2X - 6y - 4 = 0$

2) Encuentra la distancia al origen de las rectas y gráfícalas:
   a) $5x - 8y - 16 = 0$
   b) $3x - 4y + 25 = 0$
   c) $3x + 4y - 10 = 0$

3) Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio igual a 10; si el punto de tangencia es (-6, 8), determina la ecuación en su forma normal.
4) Encuentra la ecuación de la recta cuya distancia al origen es 7 y que pasa por el punto A(1, 7). (Doble solución).
5) Encuentra la distancia del punto A(-3, -2) a la recta $5x + 8y - 24 = 0$
6) Halla la distancia del punto B(-1, 7) a la recta $6x - 2y + 6 = 0$
7) Encuentra la distancia del punto A(-3, 5) a la recta $2x - y - 8 = 0$
8) Encuentra el valor del radio de una circunferencia cuyo centro es el punto C (-2, 4) y es tangente a la recta $3x - 4y + 6 = 0$
9) Encuentra el valor de la coordenada del punto P(x, 5) si la distancia a la recta cuya ecuación es $3x + 4y - 6 = 0$ es de 7 unidades.

10) Encuentra la distancia entre los siguientes pares de paralelas y gráfícalas:
   a) $2x + 3y - 6 = 0$ y $2x + 3y + 2 = 0$
   b) $x - 3y + 4 = 0$ y $x - 3y - 5 = 0$
   c) $y = -2x + 5$ y la recta $y = -2x - 7$

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 4

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Realiza lo que se te pide y entrega el reporte a tu profesor.

1) Dados los vértices del triángulo PQR cuyas coordenadas son P(-5, 6) Q(-1, -4) y R(5, 2) obtén las ecuaciones de:
   a) Sus lados
   b) Sus Medianas
   c) Sus Alturas
   d) Sus Mediatrices
   e) Sus Bisectrices

2) Dado el mismo triángulo del inciso anterior calcula las coordenadas del baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro.

3) Demuestra que los puntos cuyas coordenadas pertenecen al baricentro, ortocentro y circuncentro del triángulo anterior son colineales, es decir, pertenecen a la recta de Euler.

4) Obtén las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de las rectas determinadas por las ecuaciones $3x - 4y + 8 = 0$ y $5x + 12y - 15 = 0$

5) Encuentra el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $3x - 4y + 8 = 0$ y $5x + 12y - 15 = 0$

6) Encuentra el punto de intersección de las mediatrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados están definidos por: $7x - y + 11 = 0$, $x + y - 15 = 0$ y $7x + 17y + 65 = 0$

Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____

AUTOEVALUACIÓN

Nombre ____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno ____________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: De acuerdo a lo visto en clase contesta las siguientes preguntas, eligiendo la respuesta correcta, rellenando totalmente el círculo que corresponda:

1. ¿Cuáles son los elementos mínimos que necesitas para graficar una recta?

Ⓐ Un punto.
Ⓑ Un punto y el origen.
Ⓒ Un punto y su pendiente.
Ⓓ Un solo dato.

2. Una de las formas de la ecuación de una recta es:

Ⓐ Pendiente-ordenada en el origen.
Ⓑ Punto-ordenada en el origen.
Ⓒ Pendiente-abscisa.
Ⓓ Abscisa ordenada al origen.

3. ¿Cuántos puntos mínimos necesitas para graficar una recta?

Ⓐ Uno.
Ⓑ Dos.
Ⓒ Tres.
Ⓓ Cuatro.

4. La forma general de la ecuación de una recta es:

Ⓐ $Ax + By + C = 0$
Ⓑ $Y - Y_1 = m\,(X - X_1)$
Ⓒ $Y = mX + b$
Ⓓ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

5. La ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,1) y (2,5) es:

Ⓐ $4X + Y + 3 = 0$
Ⓑ $-4X + Y + 3 = 0$
Ⓒ $4X - Y - 3 = 0$
Ⓓ $4x - y + 1 = 0$

6. La ecuación de la recta que pasa por (-2,1) y tiene pendiente m = ½ es:

Ⓐ $-X + 2Y - 4 = 0$
Ⓑ $X + y + 4 = 0$
Ⓒ $X + 2Y - 4 = 0$
Ⓓ $x + 2y - 1 = 0$

7. La recta cuya ecuación es $2X + 3Y - 6 = 0$ corta al eje Y en el punto:

Ⓐ (0,0)
Ⓑ (0,-2/3)
Ⓒ (0,2)
Ⓓ (0, 3/2)

8. La pendiente de la recta cuya ecuación es $-3X + 2Y + 5 = 0$ resulta ser:

Ⓐ 3/2
Ⓑ 2/3
Ⓒ –3/2
Ⓓ -2/3

9. La distancia del punto (2,1) a la recta cuya ecuación es $4X + 3Y - 6 = 0$ equivale:

Ⓐ 2
Ⓑ 1
Ⓒ –2
Ⓓ – 1

10. La pendiente de la recta que es perpendicular a la recta con ecuación $2X+Y-5=0$ es:

Ⓐ 1/2
Ⓑ –2
Ⓒ –1/2
Ⓓ 2

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: ***excelente,*** por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es *bueno*, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es *insuficiente*, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

Consulta las claves de respuestas en la página 175.

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: Realiza lo que se pide en cada uno de los ejercicios siguientes.

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados y realiza la gráfica correspondiente.

   a) (-5,2) y (-1,6)
   b) (2/3,5/2) y (-1/2,-2/3)
   c) (0,5) y (3,0)

2. Encuentra la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones y realiza la gráfica correspondiente.

   a) (3,-1) y tiene pendiente m = 5.
   b) (-5,4) y tiene pendiente m = -1/3.
   c) (-1/3,-5/4) y tiene pendiente m = 2/5.

3. Encuentra la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones y realiza la gráfica correspondiente.

   a) m = 8 y ordenada en el origen igual a –2.
   b) m = 5/6 y ordenada en el origen igual a 1.
   c) m = -3/5 y ordenada en el origen igual a –1/2.

4. Encuentra la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones y realiza la gráfica correspondiente que pasa por el punto.

   a) (1,1) y es paralela a la recta que une los puntos (3,4) y (6,1).
   b) (-2,-2) y es perpendicular a la recta que une los puntos (0,3) y (3,5).
   c) (-3,6) y es paralela a la recta que tiene pendiente m = 9.
   d) (-1,2) y es perpendicular a la recta que tiene pendiente m = 5/2.
   e) (-1,-4) y es paralela a la recta cuya ecuación es 2X + Y – 1 = 0.
   f) (2,5) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es X + 2Y + 3 = 0.

5. Encuentra la distancia del punto:

   a) (3,1) a la recta cuya ecuación es 3X + 4Y + 2 = 0.
   b) (-1,5) a la recta cuya ecuación es 2X - 3Y - 1 = 0.
   c) Que resulta de la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son 2X + 3Y – 7 = 0 y X – Y – 1 = 0 a la recta cuya ecuación es 4X + 3Y – 7 = 0.

6. Realiza la gráfica de las rectas cuyas ecuaciones son dadas y encuentra la distancia al origen de cada una de ellas:

   a) $2X + 5Y + 10 = 0$.

   b) $-3X + Y + 5 = 0$.

   c) $-5X - Y + 1 = 0$.

   d) $X - Y + 9 = 0$.

   e) $7X + 4Y + 8 = 0$.

   f) $4x – 3y = 0$.

   g) $2y + 3 = 0$

   h) $3x – 6 = 0$

7. En el triángulo cuyos vértices son los puntos (3,9), (5,3), (9,7) encuentre:

   a) Las ecuaciones de los lados.
   b) Las ecuaciones de las alturas.
   c) Las ecuaciones de las medianas.
   d) Las ecuaciones de las bisectrices.
   e) Las ecuaciones de las mediatrices.
   f) Su área, utilizando la fórmula $A = \frac{(b)(h)}{2}$.
   g) El centro de la circunferencia circunscrita.

8. En la forma general de la ecuación de una recta $AX + BY + C = 0$. Realiza la gráfica correspondiente a los siguientes casos:

   a) Cuando $A = 0$.
   b) Cuando $B = 0$.
   c) Cuando $C = 0$.
   d) Cuando $A = 0$ y $C = 0$.
   e) Cuando $B = 0$ y $C = 0$.

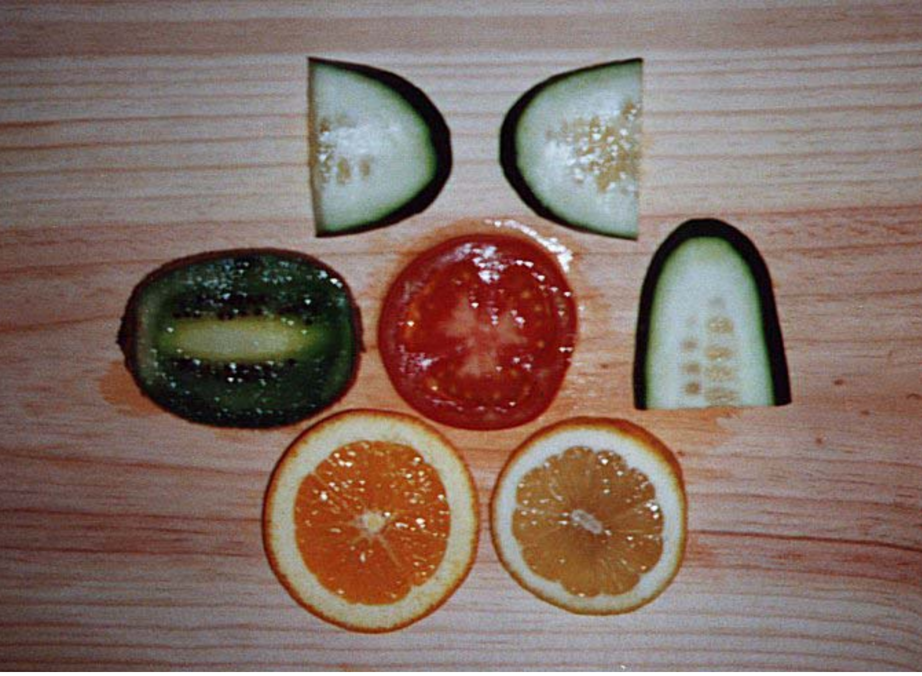
Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____



¡Cómo es posible que las matemáticas, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapten tan admirablemente a los objetos de la realidad!

Albert Einstein

Unidad 3
La circunferencia

Objetivos:

El alumno:
Resolverá problemas teóricos o prácticos relativos a la circunferencia, a partir de su caracterización como lugar geométrico, que permita aplicar e integrar sus propiedades, gráficas y sus ecuaciones ordinarias y general, recuperando los conceptos, técnicas y procedimientos, geométricos y analíticos, sobre puntos, rectas y segmentos, así como ejecutar los cortes que se juzguen convenientes para obtener las cónicas, y contribuirá a generar un ambiente escolar que favorezca el desarrollo de actitudes de iniciativa, responsabilidad y colaboración hacia el entorno en que se desenvuelve.

Temario:

- 3.1. Circunferencia y otras secciones cónicas.
  - 3.1.1. Cortes en un cono para obtener circunferencias y elipses.
  - 3.1.2. Cortes en un cono para obtener una parábola.
  - 3.1.3. Cortes en un cono para obtener una hipérbola.
- 3.2. Caracterización geométrica.
  - 3.2.1. La circunferencia como lugar geométrico.
  - 3.2.2. Elementos asociados con una circunferencia.
  - 3.2.3. Formas de trazo a partir de la definición.
- 3.3. Ecuaciones ordinarias de la circunferencia.
  - 3.3.1. Circunferencia con centro en el origen.
  - 3.3.2. Circunferencia con centro fuera del origen.
- 3.4. Ecuación general de la circunferencia.
  - 3.4.1. Conversión de forma ordinaria a forma general.
  - 3.4.2. Conversión de forma general a forma ordinaria.
- 3.5. Circunferencia que pasa por tres puntos.
  - 3.5.1. Condiciones geométricas y analíticas para determinar una circunferencia.
  - 3.5.2. Obtención de la ecuación dados tres puntos.

3.1. CIRCUNFERENCIA Y OTRAS SECCIONES CÓNICAS

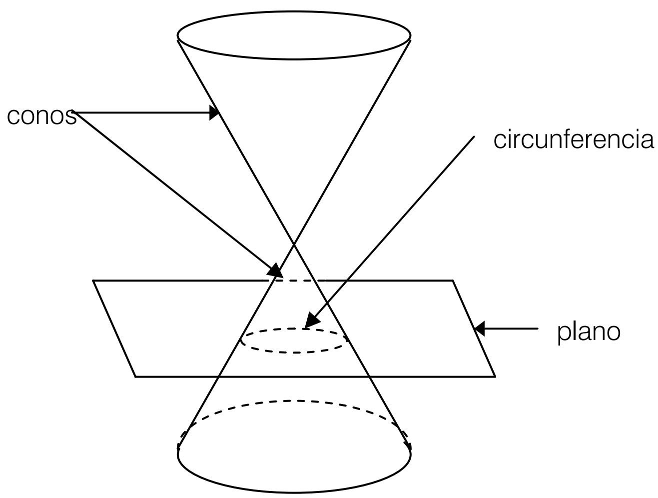
Existe un grupo de líneas curvas, que los griegos llamaron cónicas, que por sus características específicas tienen una aplicación muy amplia en la ingeniería, en la industria, en la comunicación, etc.

A este tipo de líneas se les da el nombre de cónicas, por la forma como se generan.

Al cortar con un plano a uno o dos conos unidos en sus vértices, se obtienen las siguientes figuras: la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Veamos primeramente cómo obtener circunferencias y elipses.

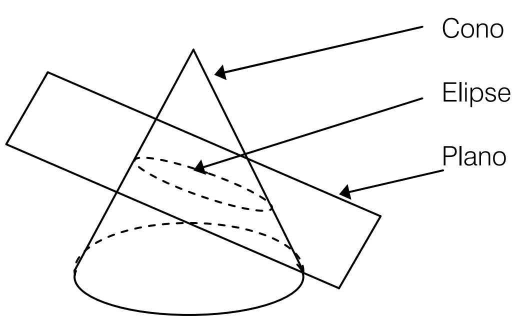
3.1.1. Cortes en un cono para obtener circunferencias y elipses.

La circunferencia se obtiene haciendo el corte, con el plano en forma horizontal:



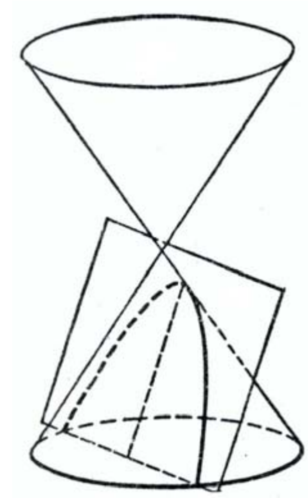
Es muy probable que la cónica más conocida sea la circunferencia, ya que se encuentra en una gran cantidad de objetos, utensilios, herramientas, etc. Tales como: botones, monedas, artesanías, autos, platos, tapas, etc. Además en otros cursos de matemáticas se ha manejado, aunque con un enfoque geométrico, sus características y los elementos que la integran, como: el centro, radio, diámetro, cuerda, tangente, etc.

Cuando el corte se hace en forma diagonal, se obtiene la elipse.



La elipse también es posible encontrarla en la naturaleza, tal es el caso de los planetas que siguen órbitas elípticas alrededor del sol, en la industria y en la relojería, la encontramos también en resortes y engranes de muchos productos.

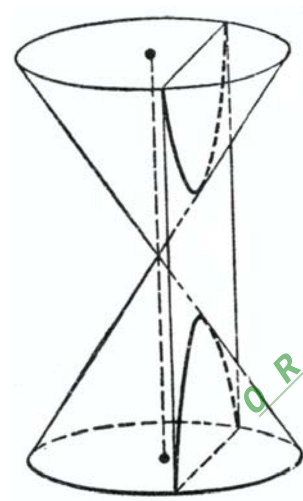
3.1.2. Cortes en un cono para obtener parábolas.



Si el corte se hace de forma inclinada, paralelo al lado del cono, se obtiene la curva llamada Parábola.

Cuando se lanza una pelota o una piedra con un cierto ángulo de inclinación, la trayectoria que sigue es la de una curva llamada parábola, esta curva tiene una gran cantidad de propiedades, que son aplicadas, por ejemplo en las llamadas antenas parabólicas, sean receptoras o emisoras, en focos de los automóviles, etc. También es común verla en la naturaleza, en la trayectoria seguida por algunos cometas, etc.

3.1.3. Cortes en un cono para obtener hipérbolas.



Si se colocan dos conos unidos en sus vértices y se cortan ambos con un plano vertical, se obtiene la hipérbola.

La hipérbola también tiene múltiples aplicaciones; una de ellas la realizan los pilotos de avión para determinar su posición. Ellos reciben señales de tres posiciones conocidas y con ciertos cálculos sencillos saben donde se encuentran. Es importante en balística, para localizar el lugar desde donde se hace un disparo, en Física se sabe que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, éstas son repelidas siguiendo una trayectoria hiperbólica.

Todos estos ejemplos son una pequeña muestra de las múltiples aplicaciones prácticas que se pueden dar a las cónicas.

EJERCICIO 1

1. Efectuar en conos de papel plegados longitudinalmente, los cortes que generan circunferencias y elipses y explicar por qué la circunferencia constituye un caso particular de la elipse.
2. Efectuar en conos de papel plegados longitudinalmente, los cortes que generan parábolas e hipérbolas.

Para saber más y fortalecer el tema visita el sitio http://wmatem.eis.es/~mathpag/INICIALES/marco_pricipal.htm

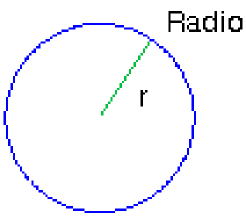
TAREA 1

Página 129.

3.2. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

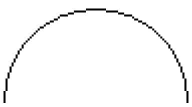
La circunferencia es, después de la recta, una de las figuras más estudiadas en geometría elemental, ya que su trazo es muy simple y sólo se requiere de un compás. En este tema se verá primeramente a la circunferencia como lugar geométrico, enseguida algunos de los elementos asociados con ella y después algunas formas de trazo a partir de su definición.

3.2.1. La circunferencia como lugar geométrico



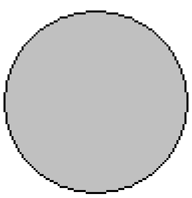
Definición: Circunferencia es el lugar geométrico del conjunto de los puntos del plano, tales que su distancia a un punto fijo, llamado centro, es siempre igual a una constante, llamada radio.

Desde el punto de vista algebraico, a diferencia de las rectas que son ecuaciones de primer grado, una circunferencia queda representada por una ecuación de segundo grado con dos variables, por ejemplo $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 27 = 0$.



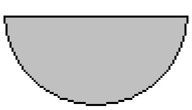
Semicircunferencia

Semicircunferencia: Mitad de una circunferencia.



Círculo

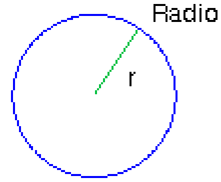
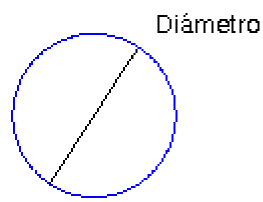
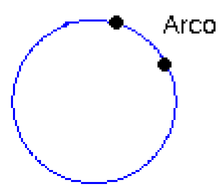
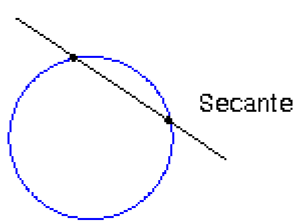
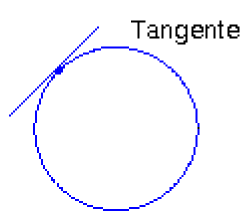
El círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia.

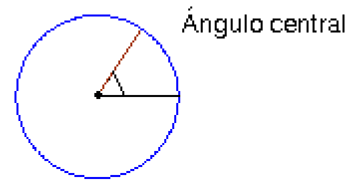
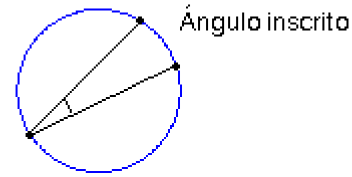
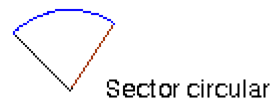
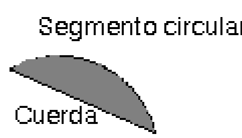


Semicírculo

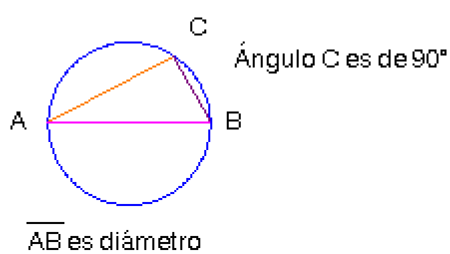
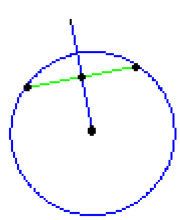
Semicírculo: Mitad de un círculo.

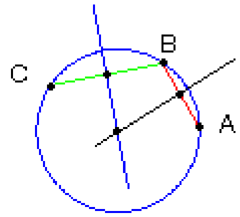
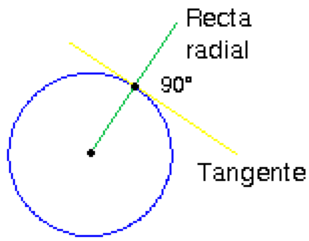
3.2.2. Elementos asociados con una circunferencia.

Elemento	Representación gráfica
Radio: Segmento que une el centro del círculo con un punto de la circunferencia.	
Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia.	
Diámetro: Es la cuerda de mayor longitud, pasa por el centro y equivale al doble del radio.	
Arco: Parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.	
Secante: Recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos.	
Tangente: Recta que intersecta o que “toca” a la circunferencia en un punto.	

Ángulo central: Ángulo formado por dos radios.	
Ángulo inscrito: Ángulo formado por dos cuerdas que tienen como punto común un punto de la circunferencia.	
Sector circular: Parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco comprendido por ellos.	
Segmento circular: Parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco que comprende.	

Es importante tener presentes las siguientes propiedades de la circunferencia:

Propiedad	Gráficamente
Si un ángulo inscrito en una circunferencia subtiende al diámetro, es un ángulo recto.	
La **mediatriz** de una cuerda cualquiera de la circunferencia pasa por el centro.	

Tres puntos determinan una circunferencia y su centro es el punto de intersección de las mediatrices de dos de sus cuerdas.	
La recta tangente a la circunferencia en un punto es perpendicular a la recta radial que pasa por el punto de tangencia	

Longitud y área

Recordarás que en geometría elemental viste como obtener el perímetro y el área de un círculo por medio de:

$$P = 2\pi\, r \qquad y \qquad A = \pi r^2$$

Si se trata de una circunferencia, obtendremos su longitud *L* en lugar de su perímetro, la cual está dada por:

$$L = 2\pi\, r\ .$$

Pero si lo que buscamos es la longitud de un arco de circunferencia, con un ángulo central θ , está dada por:

$$L = r\theta$$

Donde θ está expresado en radianes. Cuando buscamos el área de un sector circular, por ejemplo una rebanada de pizza, utilizamos:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Ejemplo 1. ¿Cuál es, aproximadamente, el perímetro y el área de una moneda de cinco pesos?

Medimos con una regla el radio de la moneda y resulta alrededor de 1.25 cm. Por lo que:

$$P = 2\pi\, r = 2\pi(1.25) = 7.8539 \text{ cm.}$$

$$A = \pi\, r^2 = \pi(1.25)^2 = 4.9087 \text{ cm2}$$

Ejemplo 2. ¿Cuál debe ser el radio de la circunferencia si se va a hacer un aro con un alambre con una longitud de 95 cm.?

$$L = 2\pi\, r$$

$$r = \frac{L}{2\pi}$$

$$r = \frac{95}{2\pi} = 15.1197 \ cm.$$

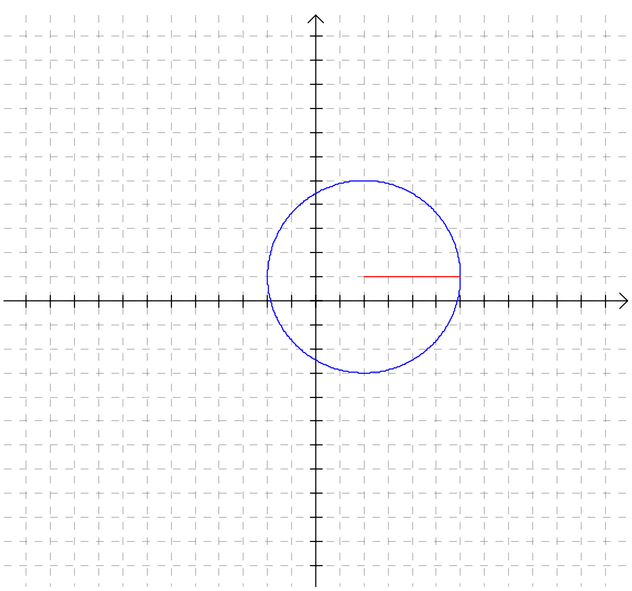
Ejemplo 3. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia donde $r = 45 \ km. \ y \ \ \theta = \frac{\pi}{4}$? ¿Cuál es el área de sector circular?

$$L = r\theta = 45\left(\frac{\pi}{4}\right) = 35.3428 \ km.$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(45)^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 795.2156 \ km^2$$

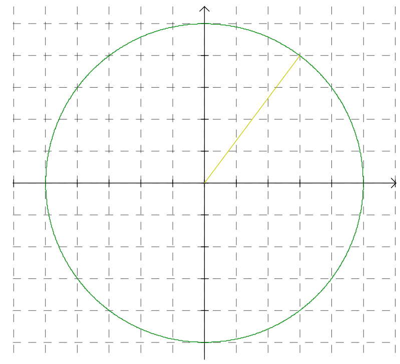
3.2.3. Formas de trazo a partir de la definición.

El trazo de una circunferencia es uno de los más simples. Éste se puede hacer, por ejemplo, con un clavo o tachuela y con un hilo tal como lo hacen los jardineros, pero obtendrás gráficas más precisas utilizando un compás.

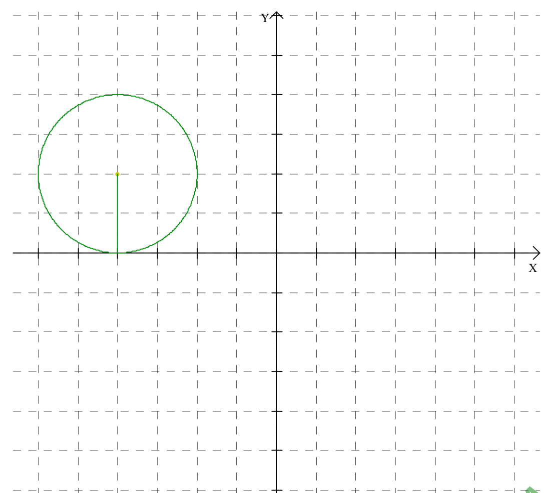


Ejemplo 1. Tiene su centro en C (2,1) y radio $r = 4$

Ejemplo 2. Tiene su centro en el origen y pasa por el punto P(3,4)



Ejemplo 3. Tiene su centro en C(-4,2) y es tangente al eje X.



EJERCICIO 2

1) Traza la gráfica y determina la longitud de la cuerda **L** y el área **A** del sector circular, si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y r = 6 u.
2) Dibuja un círculo de área: a) 20 u^2. b) 16π u^2, c) 49π u^2.
3) Dibuja una circunferencia de longitud: a) 3,1416 u. b) 45 u. c) 100 u.
4) Traza un arco de circunferencia cualquiera y localiza su centro.
5) Traza una circunferencia cualquiera, toma tres de sus puntos y localiza su centro.
6) Traza la gráfica de una circunferencia de centro en el origen y que tiene un diámetro de 8 u.

TAREA 2

Página 131.

3.3. ECUACIONES ORDINARIAS DE LA CIRCUNFERENCIA

Cuando en astronomía se logra observar las posiciones de un cuerpo que gira alrededor de otro en órbita circular (o elíptica), es posible determinar la ecuación de su trayectoria y así predecir en qué momento pasará por un punto que sea de interés para el científico.

Así como para determinar la ecuación de una recta vimos que era necesario conocer un punto por donde pasa y su pendiente, para encontrar la ecuación de una circunferencia es necesario conocer su centro y su radio utilizando para ello la ecuación ordinaria de la circunferencia. Veremos, en primer término, la ecuación de una circunferencia con centro en el origen, y después su ecuación cuando el centro de la circunferencia está en cualquier punto del plano cartesiano.

3.3.1 Circunferencia con centro en el origen.

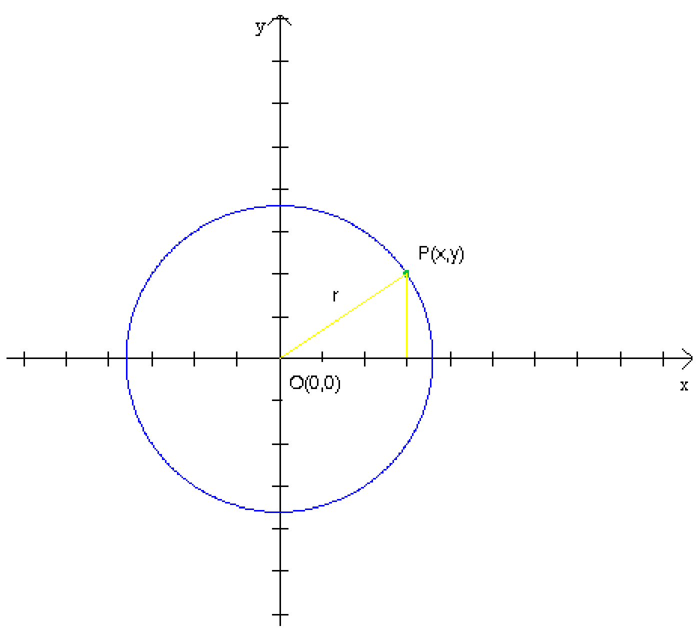
Obtención de la ecuación conocido el centro y el radio.

Si el centro de la circunferencia de radio *r* es el origen, O(0,0), su ecuación está dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ya que la distancia del origen al punto P es:

$$\begin{aligned} d(OP) &= r \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} &= r \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

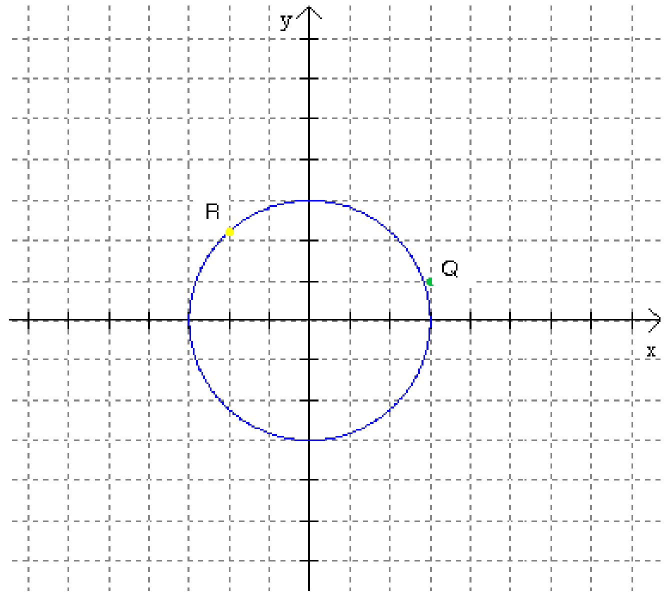


la cual se conoce como forma canónica de la ecuación de la circunferencia.

Dado que Circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia a un punto fijo, llamado centro, es siempre igual a una constante, llamada radio, cualquier punto P(x, y) que satisfaga la ecuación está en la circunferencia o pertenece a la circunferencia.

Ejemplo 1. Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen y radio r=3.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (3)^2$$
$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$



¿Pertenece el punto Q(3,1) a esta circunferencia?
Como el punto Q no satisface la ecuación,
$(3)^2 + (1)^2 - 9 \neq 0$
entonces no pertenece a la circunferencia.

¿Pertenece el punto R(-2, $\sqrt{5}$)?

Como el punto R sí satisface la ecuación, $(-2)^2 + (\sqrt{5})^2 - 9 = 0$
entonces sí pertenece a la circunferencia.

Ejemplo 2. Una circunferencia de radio $r = \dfrac{5}{2}$ tiene su centro en el origen. ¿Cuál es su ecuación?

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$
$$4x^2 + 4y^2 = 25$$
$$4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$$

Ejemplo 3. Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen y que pasa por el punto P(5,2).

Obtengamos primeramente el radio de la circunferencia; puesto que la circunferencia pasa por el punto P(5,2) se cumple que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(5)^2 + (2)^2 = r^2$$
$$25 + 4 = r^2$$
$$\sqrt{29} = r$$

Una vez que conocemos su radio, su ecuación resulta:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{29})^2$$
$$x^2 + y^2 = 29$$
$$x^2 + y^2 - 29 = 0$$

¿Pertenece el punto T(-2, - 5) a esta circunferencia? ¿por qué?

Obtención del centro y el radio a partir de la ecuación.

Por otro lado si se conoce la ecuación de una circunferencia con centro en el origen es fácil determinar su radio transformando la ecuación a su forma canónica.

Ejemplo 1. Determina el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

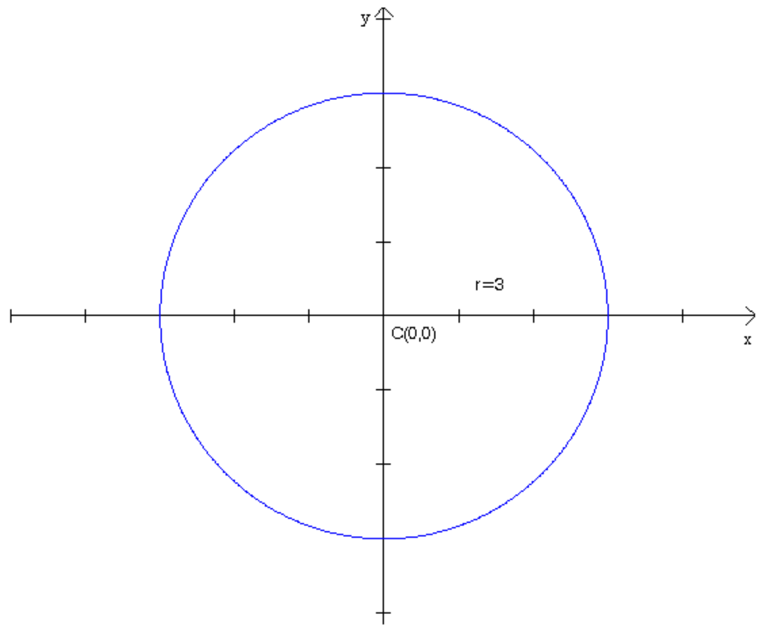
$$x^2 + y^2 - 20 = 0 .$$

$$x^2 + y^2 - 20 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 20$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\text{de donde } r^2 = 20$$
$$C(0,0) \text{ } y \text{ } r = \sqrt{20} = \sqrt{(4)(5)} = 2\sqrt{5}$$

Ejemplo 2. La ecuación de una circunferencia es $5x^2+5y^2-45=0$. Trazar su gráfica y calcular su longitud.

Encontremos, primeramente su centro y radio

$$5x^2+5y^2-45=0, \text{ simplificando}$$
$$x^2+y^2-9=0$$
$$x^2+y^2=9$$
$$x^2+y^2=r^2$$
$$\text{de donde } r^2=9$$
$$C(0,0)\ \ y\ \ r=\sqrt{9}=3$$



Su longitud es:

$$L=2\pi r=2\pi(3)=6\pi=18.8495\ u$$

EJERCICIO 3

1. **Completa la siguiente tabla:**

Centro	Radio	Ecuación
C(0,0)	$r=8$	
C(0,0)	$r=\sqrt{7}$	
C(0,0)	$r=3/4$	
		$x^2+y^2-36=0$
		$9x^2+9y^2-49=0$
		$x^2+y^2=6.25$

2. Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos a los puntos A(-6,8) y B(6,-8). Traza su gráfica y determina su ecuación.
3. Traza la gráfica y encuentra el área del círculo limitado por la circunferencia $x^2+y^2-16=0$.
4. Traza la gráfica y encuentra las coordenadas de cuando menos 10 puntos que pertenezcan a la circunferencia $x^2+y^2-25=0$

3.3.2. Circunferencia con centro fuera del origen.

Obtención de la ecuación a partir del centro y el radio.

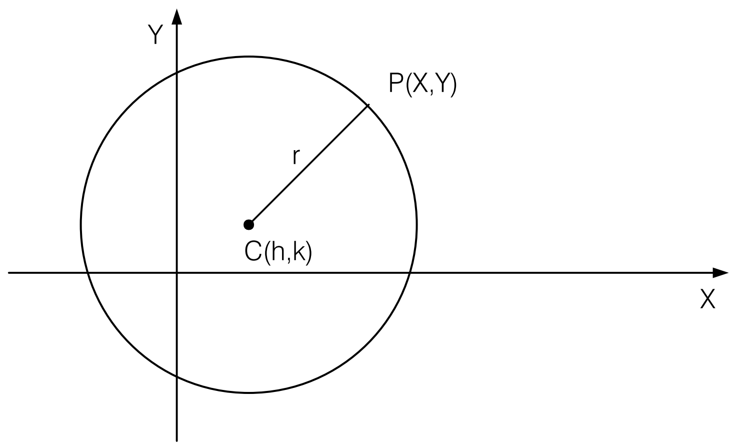
Si el centro de la circunferencia de radio *r* es el origen, C(h,k), su ecuación está dada por:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ya que:

$$d(CP)=r$$
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

la cual se conoce como forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia



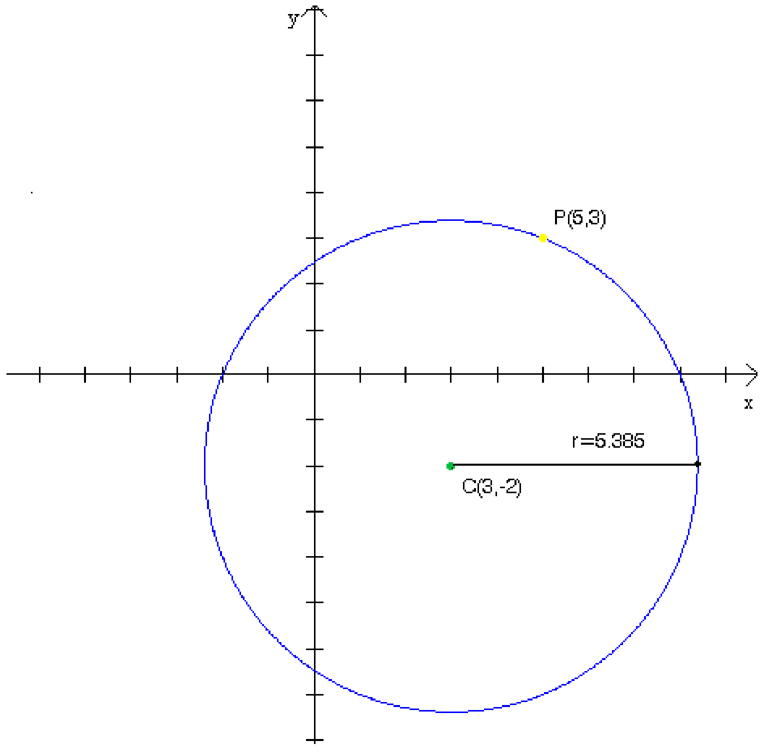
Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en C(3, -2) y radio $r=\sqrt{29}$.

Si el centro C(h, k) es C(3, -2), entonces h = 3 y k = -2

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2=(\sqrt{29})^2$$
$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=29$$
$$x^2+y^2-6x+4y-16=0$$

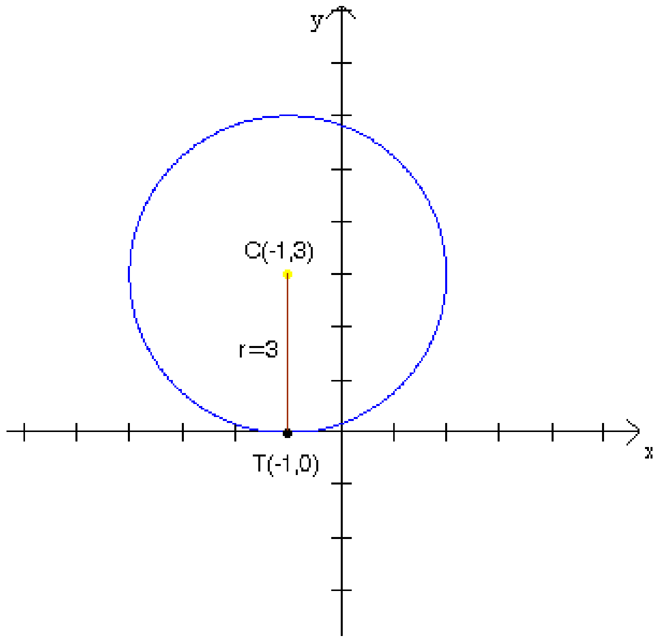
¿Pertenece el punto P(5, 3) a la circunferencia?

$$(5)^2 + (3)^2 - 6(5) + 4(3) - 16 = 0$$
$$25 + 9 - 30 + 12 - 16 = 0$$
$$0 = 0, \text{ si pertenece.}$$



¿Cuáles son las coordenadas de los puntos Q y R que tengan abscisa 1 y que pertenezcan a la circunferencia?

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto C(-1,3) y que es tangente al eje X.



Si es tangente al eje X resulta que su radio es r= d(CT) = 3, por lo tanto su ecuación será:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x+1)^2+(y-3)^2=(3)^2$$
$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=9$$
$$x^2+y^2+2x-6y+1=0$$

Obtención del centro y el radio a partir de la ecuación.

Cuando se tiene la ecuación de una circunferencia en su forma ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Podemos obtener directamente su centro C(*h, k*) y su radio *r*.

Digamos que la ecuación de una circunferencia es

$$(x-5)^2+(y+4)^2=121$$

Entonces su centro es C(5, -4) y su radio $r=\sqrt{121}=11$

También, si conocemos la ecuación de una circunferencia, en su forma general, es posible determinar su centro y su radio transformando la ecuación a su forma ordinaria, asociando los términos en cada variable, completando los trinomios cuadrados perfectos correspondientes y simplificando la ecuación.

Ejemplo1. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia.

$$x^2+y^2+4x-6y+2=0$$

Primeramente, asociamos términos y restamos 2 en ambos miembros de la ecuación.

$$x^2+4x+y^2-6y=-2$$

Después, completamos los trinomios y simplificamos.

$$x^2+4x+(2)^2+y^2-6y+(-3)^2=-2+4+9$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=11$$

Por lo que podemos decir que su centro es C(-2, 3) y su radio $r=\sqrt{11}$.

Ejemplo 2. Encontrar el área del círculo limitado por la circunferencia cuya ecuación es: $4x^2+4y^2+20x+12y-15=0$.

Simplifiquemos la ecuación y asociemos términos.

$$x^2+5x+y^2+3y=\frac{15}{4}$$

completemos los T.C.P.

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}+\frac{25}{4}+\frac{9}{4}$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

De donde resulta que el centro es C$\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y su radio $r=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$

Por lo que el área buscada es: $A=\pi r^2=\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49\pi}{4}=38.4845\ u^2$

TAREA 3

Página 133.

EJERCICIO 4

1. **Completa la siguiente tabla:**

CENTRO	RADI0	ECUACIÓN	LONGITUD	ÁREA
C(-4,3)	$r=7$			
C(2, 5)	$r=4.5$			
C(0, 0)	$r=\sqrt{8}$			
		$(x-2)^2+(y+4)^2=9$		
		$(x+3)^2+(y-0)^2=7$		
C(0, 6)				$25\pi\ u^2$

2. Encuentra el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: a) $x^2+y^2-10x+14y+10=0$; b) $4x^2+4y^2+32x-12y+9=0$.

3. Determina el área del semicírculo limitado por: $x^2+y^2-8x-20=0$.

3.4. ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

SI observas las características de las ecuaciones de las circunferencias, ya sea con centro en el origen o en cualquier otro punto del plano, te darás cuenta de que son ecuaciones tipo polinomial, de dos variables y de segundo grado y que son un caso particular de la ecuación general de segundo grado con dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Por medio de la cual se puede representar a las cónicas (circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas). En el caso de la circunferencia se cumple que: A = C y que B = 0.

3.4.1 Conversión de forma ordinaria a forma general.

Si desarrollamos la ecuación ordinaria de una circunferencia obtenemos la ecuación en su forma general.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

SI hacemos $D = -2h$, $E = -2k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$; la ecuación queda:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A la cual le llamamos forma general de la ecuación de la circunferencia.

Si el centro de la circunferencia está en el origen, C(0, 0), entonces D=0 y E=0, la ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 + F = 0$$

Si el centro de la circunferencia está sobre el eje X, C(h, 0), E = 0, la ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + F = 0$$

¿Cómo es la forma de la ecuación de una circunferencia con centro sobre el eje Y, C(0, k)?

En la ecuación de una circunferencia en su forma general, los coeficientes de los términos de segundo grado son idénticos, en este caso ambos equivalen a la unidad, aunque esto no es necesario, basta con que A = C en la ecuación general de segundo grado, ya que si éstos valores son iguales la ecuación se puede simplificar de tal manera que los coeficientes se reduzcan a uno.

Ejemplo 1. Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en C(-2, 5) y radio *r*= 3 en su forma ordinaria y en su forma general.

Forma ordinaria: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x+2)^2+(y-5)^2=(3)^2$$

Forma general: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$$D=-2h=-2(-2)=4$$
$$E=-2k=-2(5)=-10$$
$$F=h^2+k^2-r^2=(-2)^2+(5)^2-(3)^2=4+25-9=20$$

$$x^2+y^2+4x-10y+20=0$$

Ejemplo 2. Obtener la ecuación en su forma general de una circunferencia con centro en C (-4, 0) y radio $r=\sqrt{19}$.

Forma general: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$$D=-2h=-2(-4)=8$$
$$E=-2k=-2(0)=0$$
$$F=h^2+k^2-r^2=(-4)^2+(0)^2-(\sqrt{19})^2=16+0-19=-3$$

$$x^2+y^2+8x-3=0$$

Por lo visto anteriormente podemos establecer que una circunferencia siempre queda representada por una ecuación de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, pero, no necesariamente se cumple lo contrario, esto es, una ecuación de este tipo puede no representar una circunferencia como veremos enseguida.

3.4.2 Conversión de forma general a forma ordinaria.

Hay ocasiones que en vez de pedirnos la ecuación de la circunferencia se nos solicita obtener sus elementos y hacer la gráfica, para ello, requerimos como dato inicial la ecuación, representada en forma general, o sea:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Para obtener sus elementos a partir de esta ecuación, necesitamos transformarla a su forma ordinaria, para ello podemos seguir los siguientes pasos:

1. Ordenar los términos de la forma general, agrupando a las variables que sean iguales:

$$(x^2+Dx)+(y^2+Ey)=-F$$

2. Se completan los trinomios cuadrados perfectos, agregando los términos:

$$\frac{D^2}{4} \quad y \quad \frac{E^2}{4}$$

A ambos lados de la igualdad:

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

3. Factorizando se transforman los trinomios cuadrados perfectos en binomios al cuadrado:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Quedándonos así expresada en la forma ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
Donde:

$$h=-\frac{D}{2}$$
$$k=-\frac{E}{2}$$
$$r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

el centro $C(h,k)$ y el radio r son en este caso:

$$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) \quad y \quad r=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$$

La cual representa la ecuación de una circunferencia sólo si el miembro de la derecha, que nos representa r^2, es mayor que cero. ($r^2>0$).

En el caso de que r^2 sea igual a cero ($r^2=0$), significa que el radio es cero y la ecuación representa a un punto, de coordenadas (h,k).

Si r^2 es menor que cero ($r^2<0$), la ecuación no representa ningún punto real.

Estas tres condiciones las podemos resumir en la siguiente tabla:

$r^2>0$	$r^2=0$	$r^2<0$
CIRCUNFERENCIA	PUNTO	NO HAY GRÁFICA

Ejemplo. Determinar que tipo de gráfica representa la ecuación

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 = 0.$$

En este caso D = 8, E = -6 y F = 25, de donde:

$$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) = C\left(-\frac{8}{2},-\frac{-6}{2}\right) = C(-4,3)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{(8)^2 + (-6)^2 - 4(25)}{4}} = 0$$

Por lo que la ecuación representa únicamente un punto C(-4,3).

EJERCICIO 5

1. Completa la siguiente tabla:

CENTRO	RADIO	EC. FORMA ORD.	EC. FORMA GENERAL
C(-1,4)	$r = 6$		
C(0,5)	$r = \sqrt{10}$		
		$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 7$	
		$(x - 6)^2 + y^2 = 144$	
			$X^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$
			$X^2 + y^2 - 3x + 5y - 8 = 0$

2. Escribe una ecuación en forma ordinaria y en forma general que represente a un punto.
3. Determina qué representan gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $X^2 + y^2 - 20x + 8y + 117 = 0$ b) $X^2 + y^2 + 12x - 6y + 45 = 0$

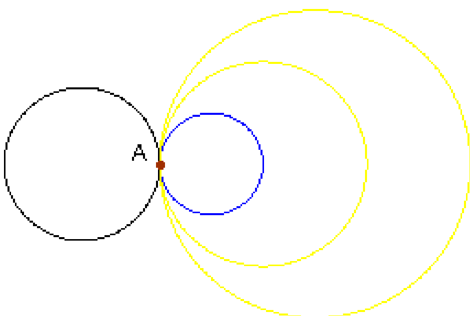
TAREA 4

Página 135.

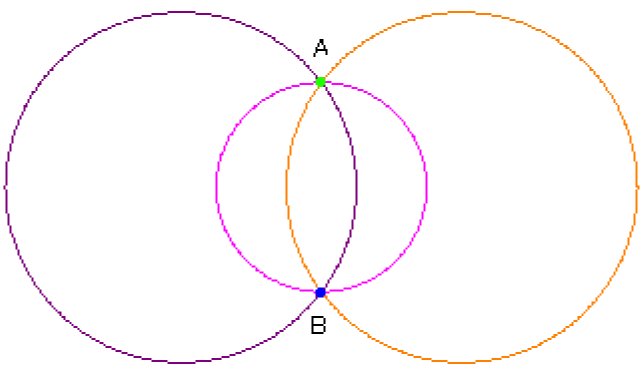
3.5. CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS

Cuando estudiamos la línea recta vimos que dos puntos determinan su gráfica y con ellos podemos obtener su pendiente y su ecuación, pero, ¿serán suficientes dos puntos para determinar una circunferencia y encontrar su centro y su radio?
La respuesta es no, ya que por dos puntos podemos trazar una cantidad indefinida de circunferencias que pasen por los mismos.
En el tema 2 de esta unidad mencionamos que tres puntos determinan una circunferencia y conociéndolos se puede determinar su centro y su radio y por lo tanto su ecuación.

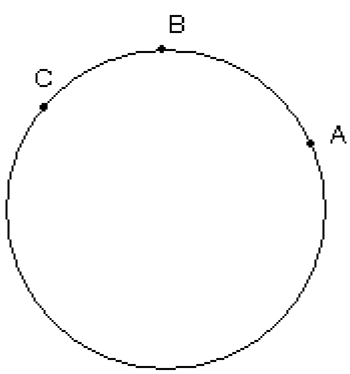
3.5.1 Condiciones geométricas y analíticas para determinar una circunferencia.



Resulta claro que por un punto A podemos trazar un número infinito de circunferencias.

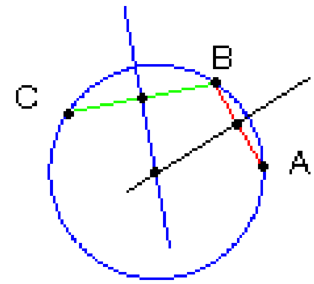


Lo mismo que por dos puntos A y B.



Pero por tres puntos A, B y C, podemos trazar únicamente una circunferencia.

Esto quiere decir que, **geométricamente una circunferencia queda determinada por tres puntos no colineales**, es decir, tres puntos A, B Y C que no estén en una misma recta y **su centro será el punto de intersección de las mediatrices de dos de sus cuerdas.**



Una vez encontrado el centro de la circunferencia, para determinar su radio lo podemos hacer determinando la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos por los que pasa la circunferencia.

Ahora bien, puesto que toda circunferencia se puede representar por una ecuación de la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, si un punto pertenece a dicha circunferencia satisface su ecuación, por lo que al sustituir los tres puntos conocidos obtendremos tres ecuaciones con las 3 incógnitas D, E y F (sistema 3X3) y **analíticamente la circunferencia está determinada cuando el sistema sea consistente**, es decir que tenga solución y que sea única.

3.5.2 Obtención de la ecuación dados tres puntos.

Con los siguientes ejemplos veremos dos formas distintas para encontrar la ecuación de la circunferencia donde se conocen tres puntos no colineales por los que pasa o que le pertenecen.

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P(1,4), Q(9,8) y R(11,4).

Encontremos, primeramente la ecuación de la mediatriz de la cuerda PQ.

El punto medio del segmento P(1,4) y Q(9,8) es

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5 \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+8}{2} = 6 \qquad M_{PQ}(5,6)$$

Su pendiente es

$$m_1 = m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por lo que la pendiente de su mediatriz es $m_2 = -2$

La ecuación la mediatriz es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 6 = -2(x-5)$$
$$y - 6 = -2x + 10$$
$$\boxed{2x + y - 16 = 0}$$

Ahora, encontramos el punto medio de la cuerda Q(9,8) y R(11,4).

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9+11}{2} = 10 \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{8+4}{2} = 6 \qquad M_{QR}(10,6)$$

Su pendiente es:

$$m_1 = m_{QR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{11-9} = \frac{-4}{2} = -2$$

Por lo que la pendiente de su mediatriz es $m_2 = \frac{1}{2}$

La ecuación la mediatriz es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 10)$$
$$2(y-6) = x - 10$$
$$2y - 12 = x - 10$$
$$-x + 2y - 2 = 0$$
$$\boxed{x - 2y + 2 = 0}$$

Ahora, como el centro C(h,k) es el punto de intersección de las dos mediatrices, para encontrarlo resolvemos el sistema 2X2 resultante:

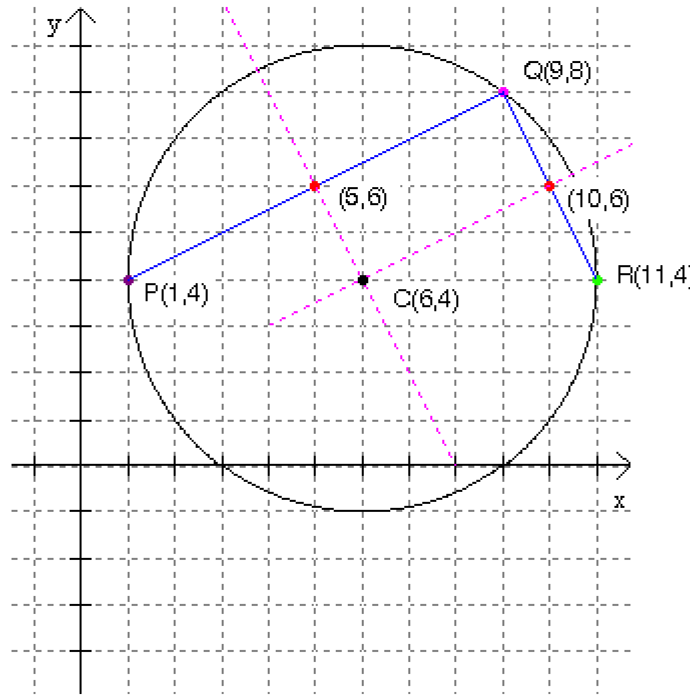
$$\begin{cases} 2x + y - 16 = 0 \ (2) \\ x - 2y + 2 = 0 \ \ (1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 4x - 2y - 32 = 0 \\ \underline{\ x - 2y + \ 2 = 0} \\ 5x \qquad -30 = 0 \\ \qquad\quad 5x = 30 \\ \qquad\quad\ x = 6 \end{array}$$

Para obtener *y* sustituimos x = 6 en la primera ecuación.

$$2x - y - 16 = 0$$
$$2(6) + y - 16 = 0$$
$$12 + y - 16 = 0$$
$$y = -12 + 16$$
$$y = 4$$

Por lo que el centro C(h,k) =C(x,y) =C(6,4) tal como se muestra en la siguiente figura.



Enseguida, obtendremos el radio de la circunferencia utilizando el centro y cualquiera de los tres puntos.
C(6,4) y Q(9,8)

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-2)^2$$
$$r^2 = (9-6)^2 + (8-4)^2 = 9+16 = 25$$
$$r = \sqrt{25} = 5$$

Observando la figura es fácil darse cuenta que la distancia del centro a P y del centro a Q también es 5.

Finalmente, con el centro C(6,4) y el radio r = 5 obtendremos la ecuación de la circunferencia.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = (5)^2$$
$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$$

En la figura también podemos ver que $\overline{PR}$ es el doble del radio por lo que el ángulo inscrito Q subtiende al diámetro y por lo tanto es un ángulo recto o mide 90°.

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P(1,4), Q(9,8) y R(11,4).

La ecuación de la circunferencia es de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El punto P(1,4) satisface su ecuación, por lo tanto:

$$(1)^2 + (4)^2 + D(1) + E(4) + F = 0$$
$$1 \;+\; 16 + D + 4E + F = 0$$
$$D + 4E + F = -17$$

Con el punto Q(9,8) se obtiene

$$(9)^2 + (8)^2 + D(9) + E(8) + F = 0$$
$$81 + 64 + 9D + 8E + F = 0$$
$$9D + 8E + F = -145$$

Y con el punto R(11,4) obtenemos:

$$(11)^2 + (4)^2 + D(11) + E(4) + F = 0$$
$$121 + 16 + 11D + 4E + F = 0$$
$$11D + 4E + F = -137$$

Así, para encontrar el valor de D, E y F podemos resolver el sistema tres por tres por el método de determinantes (o regla de Crámer) visto en el matemáticas 1.

$$\begin{cases} D + 4E + F = -17 \\ 9D + 8E + F = -145 \\ 11D + 4E + F = -137 \end{cases}$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 9 & 8 \\ 11 & 4 & 1 & 11 & 4 \end{array}\right|$$

Δ = 8 + 44 + 36 - 88 – 4 - 36 = -40

$$\Delta_D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -17 & 4 & 1 & -17 & 4 \\ -145 & 8 & 1 & -145 & 8 \\ -137 & 4 & 1 & -137 & 4 \end{array}\right|$$

Δ_D = -136 – 548 – 580 + 1096 + 68 + 580 = 480

$$\Delta_E = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -17 & 1 & 1 & -17 \\ 9 & -145 & 1 & 9 & -145 \\ 11 & -137 & 1 & 11 & -137 \end{array}\right|$$

Δ_E = -145 -187 -1233 + 1595 + 137 +153 = 320

$$\Delta_F = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & -17 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & -145 & 9 & 8 \\ 11 & 4 & -137 & 11 & 4 \end{array}\right|$$

Δ_F = - 1096 – 6380 – 612 + 1496 + 580 + 4932 = -1080

De donde resulta:

$$D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{480}{-40} = -12$$

$$E = \frac{\Delta_E}{\Delta} = \frac{320}{-40} = -8$$

$$F = \frac{\Delta_F}{\Delta} = \frac{-1080}{-\ 40} = 27$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia resulta ser:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$$

Como podemos ver se obtiene la misma ecuación por cualquiera de los dos métodos.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento P(-2, 1) y Q(6,5) utilizando su punto medio y pendientes.
2. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento P(-2, 1) y Q(6,5) utilizando que d(CP) = d(CQ).
3. Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1,4) y B(3,-2) y que tiene su centro en la recta cuya ecuación es *x + 2y + 4 = 0.*
4. Obtén la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y que pasa por (-2, 3) y (4,5).
5. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos K(-2,-3), L(3,2) y M(6,1).
6) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos R(-1,3), S(7,7) y T(9,3), utilizando: d(CR) = d(CS) y d(CR) = d(CT).

EJERCICIO 6

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.

TAREA 5

Página 137.

TAREA 1

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno_____________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: En equipo, realiza lo siguiente:

1. Elabora un dibujo donde se ubiquen los principales elementos de un cono.
2. Investiga las fórmulas para calcular el área y el volumen de un cono y plantear y resolver 3 ejemplos donde se apliquen.
3. Investiga con Arquitectos e Ingenieros (Industriales, Mecánicos, Civiles, Etc.), situaciones prácticas donde se utilicen las cónicas.

Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____

TAREA 2

Nombre____

No. de lista _______________ Grupo __________________________

Turno_______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Utilizando, regla, compás y papel cuadriculado o milimétrico, realiza lo siguiente:

1. Traza la gráfica de cada circunferencia:

   a) C(-3,-2) y r= 4.
   b) C(4,-3) y tangente al eje Y.
   c) C(5,-4) y tangente al eje X
   d) C(2,1) y pasa por el punto P(-2,6).
   e) Diámetro con extremos en A(1,-4) y B(7,4).
   f) C(-1, 2) y tangente a la recta $4x + 3y - 12 = 0$.
   g) Pasa por los puntos A(-3,2), B(1,6) y C(7, 4)

2. Traza la gráfica y determina la longitud de la cuerda L y el área A de un sector circular si:

   a) r = 7, $\theta = \frac{\pi}{6}$

   b) r = 12, $\theta = \frac{\pi}{4}$

   c) r =1, $\theta = \frac{\pi}{2}$

   d) r= 40, $\theta = \frac{5\pi}{3}$,

   e) r = 13, $\theta = 2\pi$, f) r = 2, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Revisión: ____

Observaciones:_____________________________________

____

____

____

TAREA 3

Nombre ____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno ______________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Utilizando, regla, compás y papel cuadriculado o milimétrico, realiza lo siguiente:

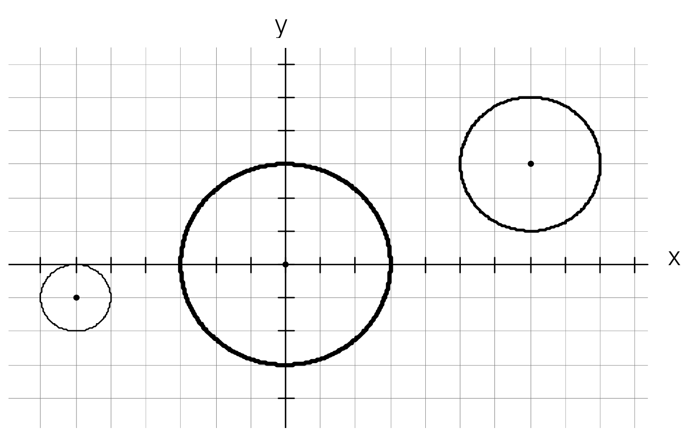
1. Obtén las ecuaciones de las circunferencias cuyo centro es C y el radio es r:

   a) C(0, 0) y r = 6
   b) C(0, 0) y r = 4.25
   c) C(-2, -5) y r = 9
   d) C(5, -2) y r = 15
   e) C(-1, 4) y r = ¾
   f) C(-3, ½) y r = $\sqrt{13}$

2. Obtén, en su forma general, las ecuaciones y traza la gráfica de cada circunferencia:

   a) Su centro esté ubicado en C(2, -5) y que pase por el punto (3, -4).
   b) Tiene su centro en el origen y pase por el punto (8, -6).
   c) Uno de sus diámetros está dado por los puntos A(-6, 5) y B(4, -3).
   d) Uno de sus diámetros esté definido por los puntos D(7, -2) y E(3, 6).
   e) Tiene su centro en C(-4, -6) y es tangente al eje Y.
   f) Tiene su centro en C(-4, -6) y es tangente al eje X.
   g) Centro en el punto (-4, 2) y sea tangente a la recta 3x + 4y – 16 = 0.
   h) Tiene su centro en (-2, 3) y sea tangente a la recta 20x –21y – 15 = 0
   i) Tiene su centro en el origen y tangente a la recta 8x –15y – 12 = 0.
   j) Centro en el punto de intersección de las rectas 3x – 2y -8=0 y X + 3y + 1 = 0 y radio $r = \sqrt{17}$

3. Obtén la ecuación de las siguientes circunferencias:



Revisión: ______________________________

Observaciones: ______________________________

____

____

____

TAREA 4

Nombre____

No. de lista _______________ Grupo __________________________

Turno________________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Resolver los siguientes problemas:

1. Encuentra el valor del radio, las coordenadas del centro, longitud y área de las circunferencias representadas por las ecuaciones:

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 52 = 0$
   c) $4x^2 + 4y^2 - 100 = 0$
   d) $2x^2 + 2y^2 - 14x + 10y - 9 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$
   f) $x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0.$

2. Determina el tipo de gráfica que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 29 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 52 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 100 = 0$
   d) $3x^2 + 3y^2 - 75 = 0$
   e) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 25 = 0$
   f) $x^2 + y^2 = 0$
   g) $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0$
   h) $x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$
   i) $5x^2 + 5y^2 + 30x - 55 = 0.$

3. Comprueba, gráficamente, que $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son circunferencias tangentes.

4. Respecto a la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ determina si el punto P(½, ½) se encuentra: dentro, fuera, en el centro o sobre la misma.

Revisión: ______________________________

Observaciones: ______________________________

____

____

____

TAREA 5

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: Resolver los siguientes problemas:

1. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

   a) A(5, 10), B(7, 4) y C(-9,-4)
   b) P(1,2), Q(3,1) y R(-3,-2)
   c) J(4,4), K(0,0) y L(-4,2)
   d) D(7,5), E(2,3) y F(6,-7)

2. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices (6,2), (7,1) y (8,-2).

Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____

AUTOEVALUACIÓN

Nombre____

No. de lista _______________ Grupo __________________________

Turno________________________________ Fecha _______________

INSTRUCCIONES: De acuerdo a lo visto en clase contesta las siguientes preguntas, eligiendo la respuesta correcta, rellenando totalmente el círculo que corresponda:

1. La ecuación de la circunferencia de radio r = 7 y el centro que está ubicado en el origen es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 + 49 = 0$
Ⓑ $(X - 0)^2 + (Y - 0)^2 = 7$
Ⓒ $X^2 + Y^2 = 49$
Ⓓ $X^2 + Y^2 -14X- 14Y= 49$

2. La ecuación de la circunferencia con centro en C(-3,1) y radio r = 2 es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 - 9X + Y + 10 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 + 6X - 2Y + 6 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 - 3X + Y + 4 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 - 6X + 2Y - 6 = 0$

3. La ecuación de la circunferencia de centro en el punto C(-4,2) y diámetro igual a 8 es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 + 4X - 8Y + 4 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 - 8X + 4Y + 4 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 + 8X - 4Y - 44 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 8X - 4Y + 4 = 0$

4. La ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos A(-3,5) y B(7,-3).

Ⓐ $X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 36 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 + 4X + 2Y + 36 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 - 2X - 4Y + 36 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 6X - 10Y - 36 = 0$

5. La ecuación de la circunferencia de centro en C(-2,3) y que sea tangente a la recta $20X - 21Y - 42 = 0$ es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 + 6X - 4Y + 12 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 - 6X + 4Y - 12 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 + 4X - 6Y - 12 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 4X - 6Y - 29 = 0$

6. La ecuación de la circunferencia de centro en C(-1,-3) y que sea tangente a la recta que une los puntos A(-2,4) y B(2,1) es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 + 2X + 6Y - 15 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 + 6X + 2Y - 15 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 - 6X - 2Y + 15 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 2X + 6Y - 25 = 0$

7. La ecuación de la circunferencia $X^2 + Y^2 - 6X + 4Y - 3 = 0$, expresada en su forma ordinaria queda:

Ⓐ $(X + 2)^2 + (Y - 3)^2 = 16$
Ⓑ $(X + 3)^2 + (Y - 2)^2 = 16$
Ⓒ $(X - 6)^2 + (Y + 4)^2 = 16$
Ⓓ $(X - 3)^2 + (Y + 2)^2 = 16$

8. La ecuación que representa sólo un punto es:

Ⓐ $X^2 + 2X + 3Y + 5 = 0$
Ⓑ $5X - 4Y + 8 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 + 4X - 6Y + 13 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 4X - 6Y - 13 = 0$

9. El área A del círculo limitado por la circunferencia representada por la ecuación:
$X^2 + Y^2 + 8X - 6Y + 9 = 0$, es:

Ⓐ $9\ u^2$
Ⓑ $16\ u^2$
Ⓒ $25\ u^2$
Ⓓ $81\ u^2$

10. La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: (4,5), (3,-2) y (1,-4) es:

Ⓐ $X^2 + Y^2 - 7X + 5Y - 38 = 0$
Ⓑ $X^2 + Y^2 - 5X + 7Y - 44 = 0$
Ⓒ $X^2 + Y^2 + 5X - 7Y - 44 = 0$
Ⓓ $X^2 + Y^2 + 7X - 5Y - 44 = 0$

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: ***excelente,*** por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es *bueno*, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es *insuficiente*, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

Consulta las claves de respuestas en la página 175.

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ________________________

Turno______________________________ Fecha _____________

INSTRUCCIONES: Con ayuda de investigación bibliográfica resuelve cada una de las siguientes cuestiones y presenta un reporte a tu profesor:

1. Determina la ecuación de la circunferencia, si los valores del centro y el radio son:

   a) C(0,0) y $r = 6$
   b) C(0,0) y $r = 1$
   c) C(-2,3) y $r = 4$
   d) C(-4,-5) y $r = 2$

2. Encuentra el centro y el radio de las circunferencias, cuyas ecuaciones son:

   a) $X^2 + Y^2 + 8X - 10Y - 23 = 0$
   b) $X^2 + Y^2 - 8X - 7Y = 0$
   c) $2X^2 + 2Y^2 - 6X = 0$
   d) $5X^2 + 5Y^2 - 32X - 8Y - 34 = 0$

3. Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

   a) A(1,2), B(3,1) y D(-3,-1)
   b) E(-4,-3) F(-1,-7) y G(0,0)
   c) H(1,1), I(1,3) y J(9,2)
   d) K(8,-2), L(6,2) y M(3,-7)

4. Obtén la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados se representan algebraicamente por las ecuaciones: $X - Y + 2 = 0$, $2X + 3Y - 1 = 0$, y $4X + Y - 17 = 0$.

5. Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados se representa algebraicamente por las ecuaciones: $4X - 3Y - 65 = 0$, $7X - 24Y + 55 = 0$, Y $3X + 4Y - 5 = 0$.

6. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el origen que sea tangente a la recta cuya ecuación es $8X - 15Y - 12 = 0$.

7. Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1,-4) y B(5,2) y que tiene su centro en la recta cuya ecuación es $X - 2Y + 9 = 0$.

8. Obtén la ecuación de la circunferencia que sea tangente a la recta cuya ecuación es $3X - 4Y - 13 = 0$ en el punto A(7,2) y cuyo radio es igual a 10.

9. Obtén la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas definidas por $X - 2Y + 4 = 0$ y $2X - Y - 8 = 0$ y que pase por el punto A(4,-1).

10. Obtén la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas definidas por: $X - 3Y + 9 = 0$ y $3X + Y - 3 = 0$ y que tenga su centro en la recta representada por $7X + 12Y - 32 = 0$.

11. Determina la longitud de la cuerda que determina la recta $x=3$ al cortar la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

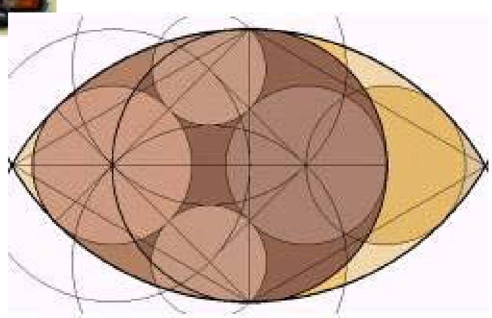
____

____

Unidad 4
La parábola

Objetivos:

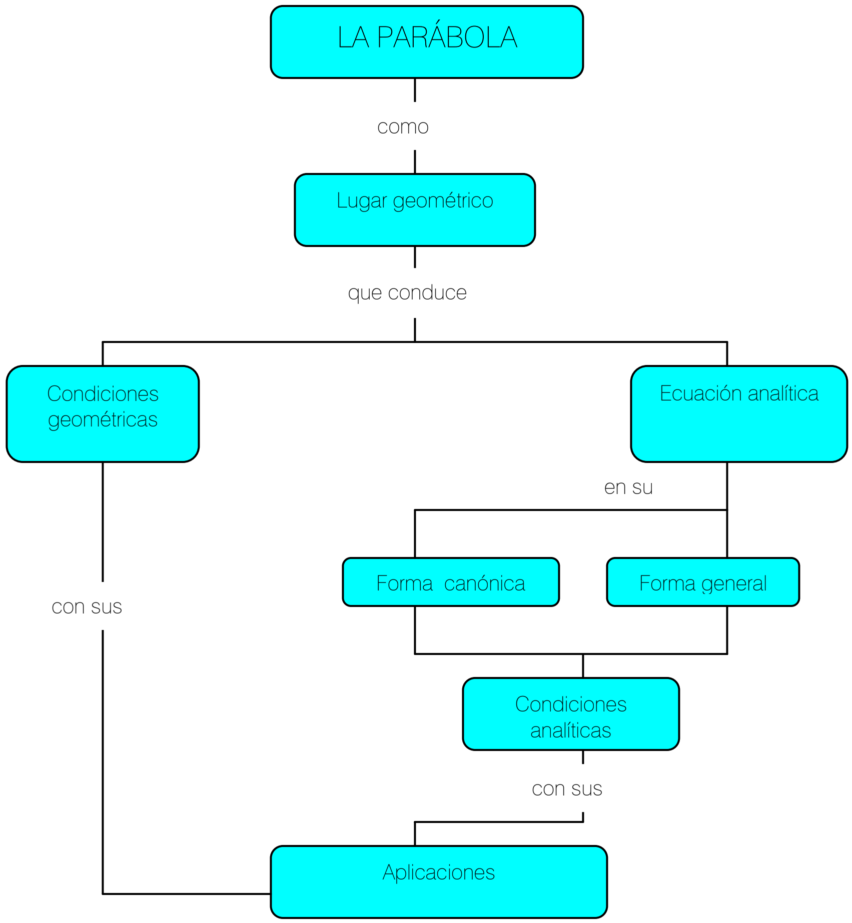
El alumno:
Resolverá problemas teóricos o prácticos relativos a la parábola, a través del análisis descriptivo, aplicación y combinación de sus propiedades, gráficas y ecuaciones, relacionando con los conceptos, técnicas y procedimientos geométricos y analíticos sobre puntos, rectas, segmentos y circunferencias, contribuyendo a generar un ambiente escolar que favorezcan el desarrollo de actitudes e iniciativas, responsabilidad y colaboración.



Se trata de una curva muy interesante y muy común, aparece en numerosos fenómenos de la naturaleza o menos frecuentes en nuestras ciudades.
El chorro de agua en una fuente, la trayectoria de un balón de fútbol, el lanzamiento de una flecha, el movimiento de un proyectil lanzado al aire, los faros de los autos, las antenas parabólicas etc.…

Temario:

MAPA CONCEPTUAL UNIDAD 4
La Parábola



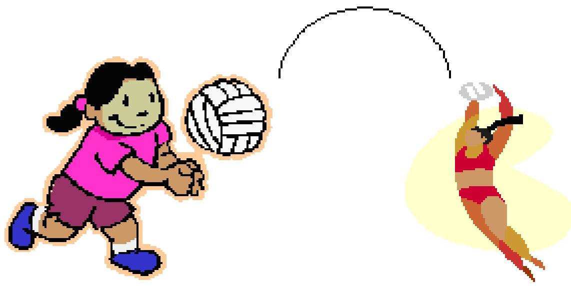
4.1. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

4.1.1. La parábola como lugar geométrico.

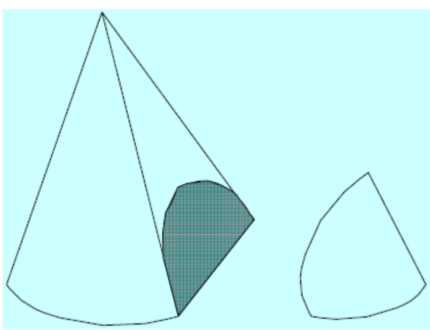
En un partido de voleibol que se disputa entre los equipos azul y rojo, se realiza un saque por parte del equipo rojo en el cual el balón fue recibido por un jugador del equipo contrario que está ubicado a 10 metros de distancia.
¿Que trayectoria tiene el balón?.

Si, efectivamente, la trayectoria del balón es una parábola ¿Qué altura máxima alcanza la pelota?

La gráfica de la trayectoria del balón es la siguiente:

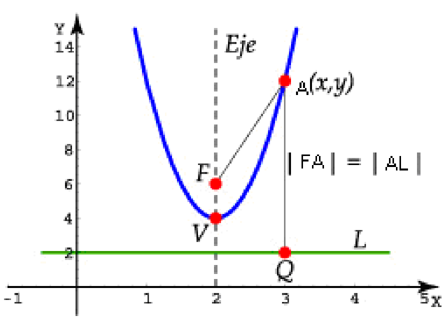


Esta cónica llamada parábola, se describe geométricamente como la curva que resulta al interceptar un cono recto circular y un plano paralelo a la generatriz del cono. Como se muestra en la figura:



Definición:

Una parábola es el lugar geométrico que comprende todos los puntos en el plano que cumplen la propiedad de estar siempre al a misma distancia (equidistan) de un punto fijo llamado <u>foco</u> y de una recta fija que no pasa por el punto llamadas <u>directriz</u>



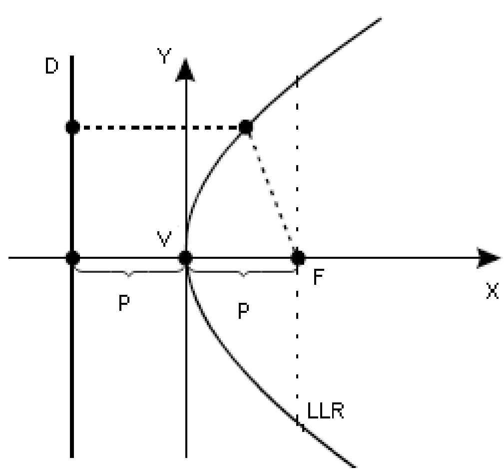
4.1.2. Elementos asociados a una parábola.

Al punto fijo llamado foco lo representaremos con F, a la recta fija llamada directriz con D.

La distancia entre el foco y la vértice y a la distancia entre el vértice y la directriz lo representamos por p.
El vértice de la parábola con V.
La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco y por el punto de la parábola llamado vértice (V), se llama eje de la parábola.
La posición del eje determina la posición de la parábola. La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje.

Lado recto: Se llama ancho focal o lado recto de la parábola, la magnitud del segmento de recta perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco uniendo dos puntos de la misma y su longitud esta dada por L.L.R. $= 4|p|$

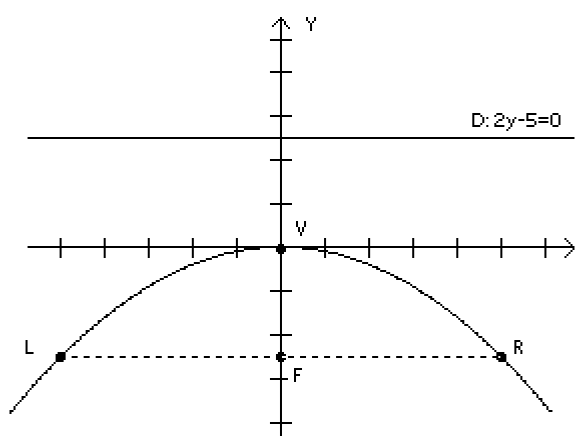
Estos elementos se pueden apreciar en la siguiente gráfica



4.1.3. Formas de trazo de la parábola a partir de su definición.

Una forma fácil de dibujar una parábola consiste en localizar su directriz, vértice, foco y lado recto (LR) y trazar su gráfica por los puntos V,L y R. Por ejemplo, si una parábola tiene por directriz la recta $2y - 5 = 0$, con vértice en el origen V(0, 0), Foco en F(0, -2.5) y L.L.R.=10, su gráfica sería:

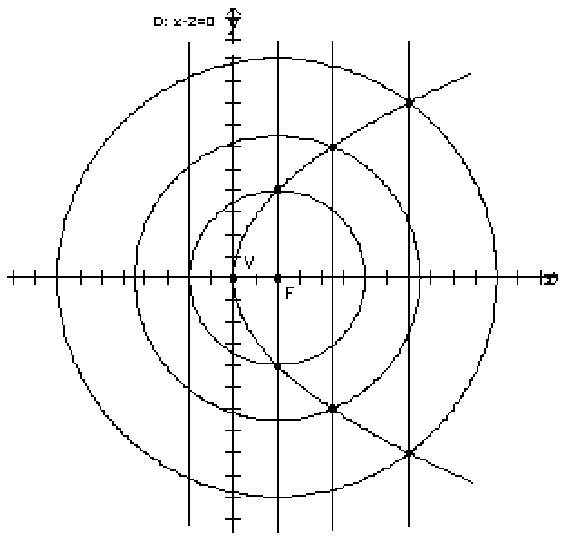
Para saber más y profundizar sobre el tema , visita el sitio http://soko.com.ar/matem/matematica/Conicas.htm



Una forma más precisa de graficar una parábola es utilizando regla y compás, para ello se pueden seguir los siguientes pasos:

1) Localizar la directriz, el vértice y el foco.
2) Se trazan rectas paralelas a la directriz a una distancia arbitraria “d” de la misma.
3) Enseguida, para cada recta, se trazan circunferencias con centro en F y radio “d”. Los puntos donde la circunferencia intersecte a la recta están en la parábola.
4) Se traza su gráfica.

Por ejemplo, la gráfica de una parábola con directriz $x + 2 = 0$, V(0, 0) y F(2, 0) quedaría de la siguiente forma:



Para saber más y enriquecer el tema, visita el sitio www.tododibujo.com

O R A M A S

Instrucciones: En equipo realiza los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 1

1) Traza la gráfica de una parábola con vértice en el origen y foco en (0, 3)
2) Traza la gráfica de una parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje X y $p = -1$.
3) Traza la gráfica de una parábola con foco en (0, -2) y Directriz $y - 2 = 0$.
4) Traza la gráfica de una parábola con vértice en V(3,1) y F(3, -1) . ¿Cuál es la ecuación de su directriz?
5) Utilizando regla y compás traza la gráfica de una parábola que tenga su vértice en el origen, que abra hacia arriba y L.L.R. = 12.
6) Utilizando regla y compás traza la gráfica de una parábola con vértice en el origen y directriz la recta $2x + 6 = 0$.

4.2. ECUACIONES ORDINARIAS DE LA PARÁBOLA

Desde el punto de vista algebraico, una parábola que abra hacia la derecha o hacia la izquierda (parábola horizontal) está representada por una ecuación de segundo grado de la forma general $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ mientras que una parábola que abra hacia arriba o hacia abajo (parábola vertical) está dada por una ecuación de la forma $x^2 + Dx + Ey + F = 0$. ¿Qué diferencia notas respecto a la ecuación general de una circunferencia?.

La primera de esas ecuaciones es el desarrollo de la llamada **ecuación ordinaria** de la parábola horizontal $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Mientras que la segunda es el desarrollo de la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

La obtención de ambas ecuaciones es consecuencia de la definición de parábola y su demostración puede consultarse en la bibliografía.

4.2.1. Parábolas horizontales y verticales con vértice en el origen.

Considerando la posición del punto fijo F y la de la directriz, la parábola con vértice en el origen puede abrir en forma horizontal (el foco está a la derecha o a la izquierda del origen) o en forma vertical (el foco está arriba o abajo del origen).

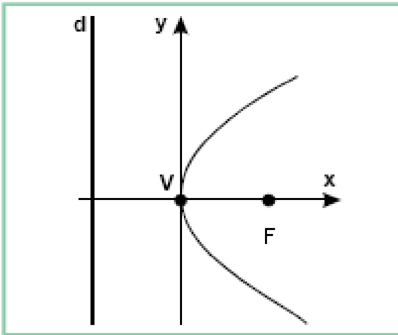
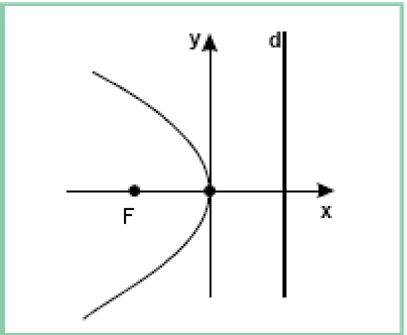
Parábolas horizontales

Cuando se tiene el eje focal Horizontal y su vértice en el origen V (0,0,) la ecuación toma la forma canónica sustituyendo los valores de las coordenadas del vértice en la ecuación ordinaria $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

La ecuación resultante es: $(y-0)^2 = 4p(x-0)$

$$y^2 = 4px$$

Eje focal sobre el eje X (horizontal)

	
Sí p>0 la parabola abre hacia la derecha (hacia la parte positiva del eje X)	Sí p<0 abre hacia la izquierda (hacia la parte negativa del eje X

Parábolas verticales

Cuando el eje focal es vertical y su vértice en el origen V (0,0) la ecuación tiene la forma ordinaria:

$$(x-k)^2 = 4p(y-h)$$

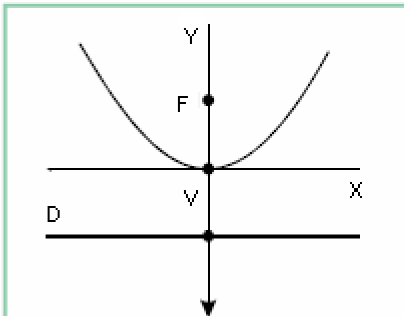
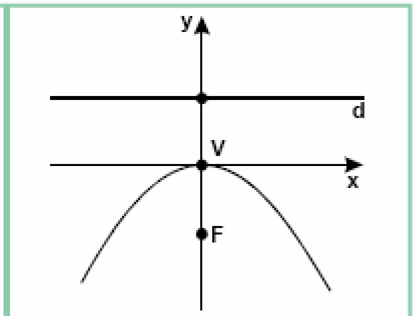
y sustituyendo las coordenadas del vértice

$$(x-0)^2 = 4p(y-0)$$

la ecuación resultante en su forma canónica es

$$x^2 = 4py$$

Eje focal sobre el eje Y (vertical)

	
Sí p>0 la parabola abre hacia arriba (hacia la parte positiva del eje Y)	Sí p<0 la parabola abre hacia la izquierda (hacia la parte negativa del eje Y)

Obtención de los elementos a partir de la ecuación

En base a la ecuación de la parábola se pueden obtener sus elementos:

1) Las coordenadas del vértice
2) La ecuación de la directriz
3) Las coordenadas del foco
4) La longitud del lado recto
5) Su gráfica

a) Parábolas con eje horizontal

Cuando el eje de la parábola es horizontal, su ecuación es de la forma: $y^2 = 4px$

Las coordenadas del vértice V (0, 0)

Si p>0, la parábola abre hacia la derecha por lo cual el foco está en F(p, 0)

Si p<0, la parábola abre hacia la izquierda las coordenadas del foco son F(p, 0).

La ecuación de la directriz $x = -p$

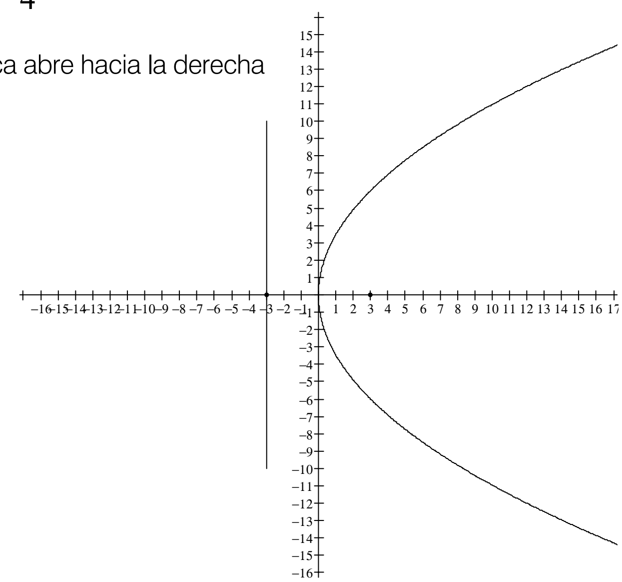
La longitud del lado recto $LLR = 4|p|$

Ejemplo 1: Encontrar los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 12x$

El vértice esta en el origen V (0,0) y la ecuación es de la forma $y^2 = 4px$

por lo que $4p = 12$ y $p = \dfrac{12}{4}$ es decir que $p = 3$

podemos deducir que la gráfica abre hacia la derecha (p>0)



Las coordenadas del foco
Foco (p, 0)
Foco (3,0)

La ecuación de la directriz
$x = -p$
$x = -3$

b) Parábolas con eje vertical

Cuando el eje de la parábola es vertical su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$.

Las coordenadas del vértice V (0, 0)

Si p>0, la parábola abre hacia arriba por lo cual el foco está en F(0, p)

Si p<0, la parábola abre hacia abajo las coordenadas del foco son F(0, p).

La ecuación de la directriz y = – p

La longitud del lado recto $LLR = 4|p|$

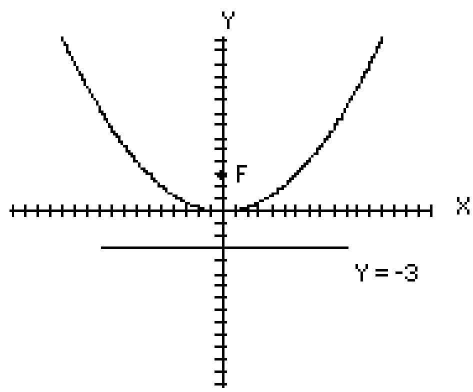
Ejemplo 2:
Encontrar los elementos de la parábola cuya ecuación es $x^2 - 12y = 0$
Primeramente transformemos la ecuación a su forma canónica $x^2 = 12y$
Y de ahí podemos deducir que p> 0 y que su gráfica abre hacia arriba.

Su vértice está en el origen V (0,0)

$LLR = 4|p| = 12$

por lo que $p = \frac{12}{4}$ es decir que p = 3

con este valor podemos calcular:



Las coordenadas del foco

Foco (0, p)= (0, 3)

Foco (0,3)

La ecuación de la directriz

y = – p = - 3

y = - 3

Obtención de la ecuación a partir de los elementos

Por otro lado, si conocemos ciertos elementos o datos de una parábola podemos completar su gráfica y obtener su ecuación.

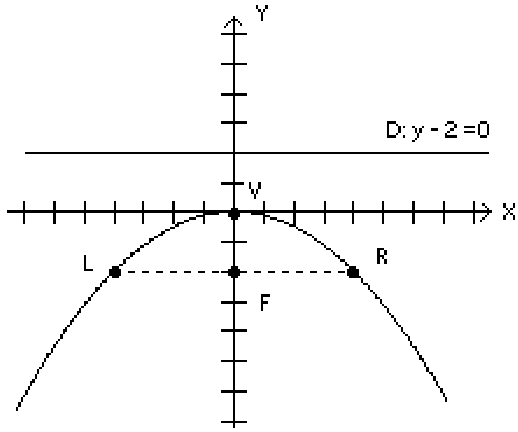
Ejemplo. Trazar la gráfica y encontrar la ecuación de una parábola con V(0, 0) y que tenga por directriz la recta y – 2 = 0.

De la ecuación de la directriz y - 2 = 0 obtenemos la ecuación y = 2, por lo tanto la parábola abre hacia abajo (vertical) y p = - 2 (p < 0).
El foco de la parábola será F(0, p) = F(0, -2)
La longitud de su lado recto o ancho focal es L.L.R. = 4|p|= 4|-2|= 8.

Su ecuación se obtiene por medio de:

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(-2)y$$
$$x^2 = -8y$$
$$x^2 + 8y = 0$$

y su gráfica:



EJERCICIO 2

Instrucciones:

I. En equipo, identifiquen cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a parábolas con V(0, 0) y en su caso indica hacia donde abren:

1) $x^2 + y^2 = 1$ 2) $y^2 - 20x = 0$ 3) $x + 2y = 0$ 4) $4x^2 + y = 0$
5) $x^2 = 2y$ 6) $2y - 10 = 0$ 7) $y^2 = 4(-1)x$ 8) $y = 2x^2$

II. Obtengan los elementos de las parábolas llenando los espacios faltantes en la tabla.

	Ecuación	Vértice	Foco	EC: Directriz
1)	$y^2 = 4x$	V(0,0)	F(1, 0)	x = -1
2)	$y^2 = -16x$	V( )	F(-4,0)	
3)	$x^2 = -20y$			
4)	$x^2 + 2y = 0$			
5)		V(0,0)		y = 5
6)			F(-1.5, 0)	2 x - 3 = 0
7)		V(0, 0)		2y + 5 = 0
8)			$F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$	D: $x = -\frac{7}{4}$

TAREA 1

Páginas 167.

4.2.2. Parábolas horizontales y verticales con vértice fuera del origen.

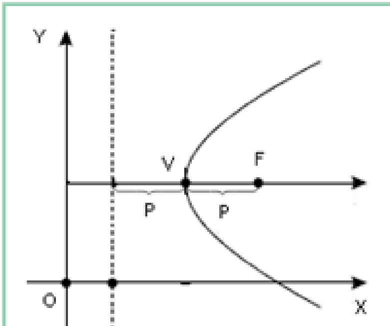
Veamos ahora el caso de parábolas cuyo vértice se encuentre en cualquier punto fuera del origen V(h. k).

Parábolas horizontales.

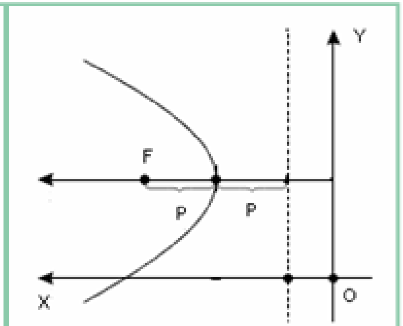
La forma ordinaria de la ecuación de una parábola con vértice V (h, k), foco en F(h + p, k) y directriz la recta x = h- p (parábola horizontal) es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Eje focal paralelo al eje x



Si p >0 la parábola abre hacia la derecha (hacia la parte positiva del eje X)



Si p<0 la parábola abre hacia la izquierda (hacia la parte negativa del eje X)

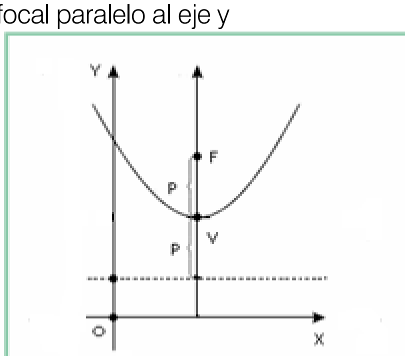
Parábolas verticales.

La forma ordinaria de la ecuación de una parábola con vértice v (h, k), foco en el punto F(h, k +p) y directriz la recta y = k – p es :

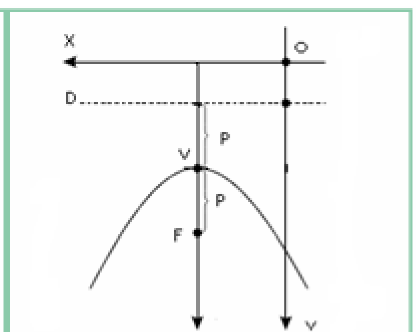
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

El eje de la parábola es vertical y el foco $\boldsymbol{F}$ está a P unidades (orientadas) del vértice.

Eje focal paralelo al eje y



Sí p>0 la parabola abre hacia arriba (hacia la parte positiva del eje Y)



Sí p<0 la parabola abre hacia abajo (hacia la parte negativa del eje Y)

RECUERDA QUE:
Ya sea horizontal o vertical el signo del parámetro “p” nos da la dirección en que se abre la parábola Siendo el valor positivo “$p > 0$” abre a la derecha o hacia arriba y el valor negativo “$p < 0$” abre hacia la izquierda o hacia abajo.

Y en cualquiera de los dos casos la variable que no está elevada al cuadrado nos indica si es horizontal o vertical.

Obtención de los elementos a partir de la ecuación

Al igual que con parábolas con vértice en el origen, podemos encontrar toda la información de una parábola con vértice en V(h, k) a partir de su ecuación en su forma ordinaria..

Cuando la ecuación tiene su eje focal horizontal $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Las coordenadas del vértice son: V (h, k)

Si $p > 0$, labre hacia la derecha y las coordenadas del foco son: $(h+p, k)$

Sí $p < 0$, abre hacia la izquierda y las coordenadas del foco son$(h+p, k)$

La ecuación de la directriz $x = h - p$

La longitud del lado recto $LLR = 4|p|$

Ejemplo 1:
Si la ecuación de una parábola es: $(y-3)^2 = -8(x-3)$ la ecuación es

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ por lo que podemos deducir que las coordenadas del vértice son V(h, k) entonces V (3, 3)

además se tiene que: $4p = -8$

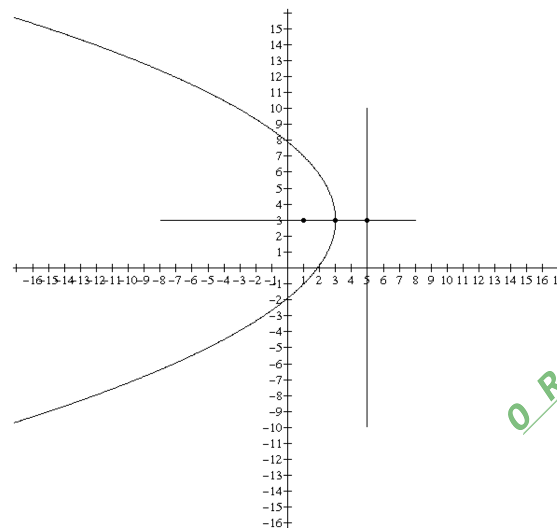
de donde $p = \frac{-8}{4}$ $p = -2$

La ecuación de la directriz es $x = h - p$
por lo que $x = 3-(-2)$

Entonces la ecuación de la directriz es $x = 5$

Las coordenadas del foco $(h+p, k) = (3+(-2), 3) = (1, 3)$

Como $p<0$ la parábola abre hacia la izquierda



Cuando la ecuación tiene su eje focal Vertical $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
Las coordenadas del vértice V (h, k)

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y las coordenadas del foco son $(h, k+p)$

Sí $p < 0$, la parábola abre hacia abajo y las coordenadas del foco son $(h, k+p)$

La ecuación de la directriz $y = k - p$

La longitud del lado recto $LLR = 4|p|$

Ejemplo 2: Encuentra las coordenadas del vértice y la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es: $(x + 2)^2 = 12(y - 4)$.

Dado que la ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, encontramos que el vértice es V(h, k)= (-2, 4) y que 4 p = 12 por lo que p = 3, (p>0) por lo que abre hacia arriba y a ecuación de su directriz es: y= k – p = 4 – 3 = 1 o sea y = 1.

Obtención de la ecuación a partir de sus elementos

Cuando conocemos algunos elementos de la parábola podemos deducir los otros y trazar su gráfica.

Ejemplo: El vértice de una parábola es V(2, -3) y su foco F(2, -1). Trazar su gráfica y hallar su ecuación ordinaria.

Al graficar los datos observamos que la parábola es <u>vertical</u> por lo que el vértice es V(h, k) = (2, -3) y el foco F(h, k + p) = (2, -1)
de donde k + p = -1 y como k = -3

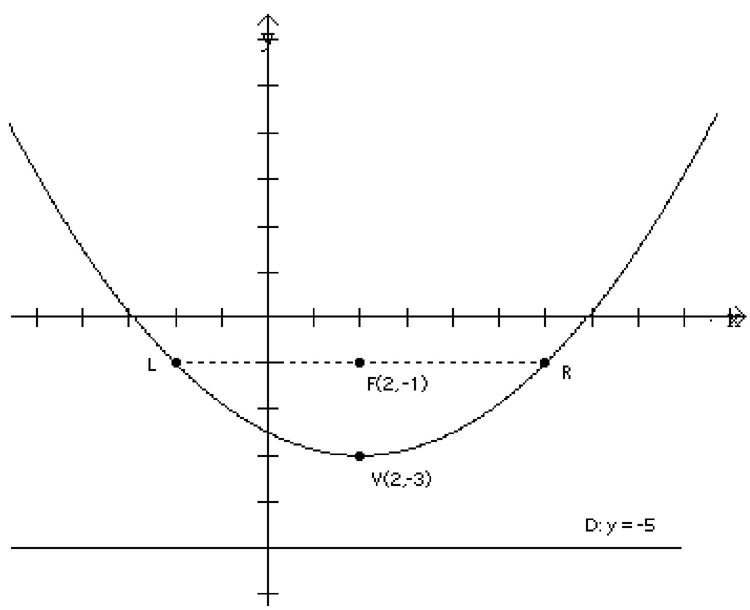
$$-3 + p = -1$$
$$p = 2$$

su directriz es: $y = k - p$
$$y = -3 - 2$$
$$y = -5$$

La longitud de su lado recto resulta: L.L.R. = 4|p| = 4|2| = 8.

Su ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

esto es: $(x - 2)^2 = 4(2)(y + 3)$
o sea $(x - 2)^2 = 8(y + 3)$



Instrucciones: En equipo, resolver los siguientes problemas haciendo la gráfica correspondiente y entregar el reporte a tu profesor.

1) Determina la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en (1, 3) y foco en (2, 3).
2) Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el punto (-1, 1) y directriz la recta 2y – 5 =0.
3) Determina la ecuación de la parábola sí su vértice (2 , 3), y el foco en (1, 3).
4) Traza la gráfica y hallar la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en (-2, 4) y foco en (-2, 5).
5) Determina la ecuación ordinaria de la parábola con foco en (-1,2) y directriz y = 5.
6) Encuentra la ecuación de la parábola que cumple con las siguientes condiciones: V (-2,5) y F (-4, 5).
7) Tiene su foco en F(-1, 0) y directriz la recta x – 1 = 0.
8) Encuentra todos los elementos y gráfica de cada una de las parábolas:
   a) $(y + 3)^2 = -10(x – 2)$ b) $(x+1)^2 = 4(x + 2)$ c) $x^2 = -6(y -2)$

EJERCICIO 3

4.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

4.3.1. Conversión de la forma ordinaria a la forma general.

Si consideramos las ecuaciones de la parábola con vértice en cualquier punto del plano tendrá la ecuación:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$ Sí su eje focal es horizontal

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$ Sí su eje focal es vertical

La ecuación general se obtiene desarrollando el binomio al cuadrado

$Y^2 -2ky +k^2 = 4px – 4ph$ igualando a cero la ecuación

$Y^2 -– 4px - 2ky +k^2 +4ph = 0.$

En el desarrollo del binomio podemos definir las constantes, empleando el principio de cerradura de los números reales, de la siguiente manera:

$-4p = D$

$-2k = E$

$K^2 + 4ph = F$

Por lo que la ecuación se transforma a:

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$ resultando la ecuación general de la parábola horizontal.

Por analogía se concluye que la parábola con eje vertical será

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde

-2h = D

-4p = E

h^2 + 4pk = F

Ejemplo:

Obtenga la forma general de la ecuación de la siguiente parábola dada en su forma ordinaria: $(y-3)^2 = 4(-1)(x-2)$

Aquí : h = 2, k = 3 y p = - 1

Considerando que la parábola es con eje horizontal:

D = -4p = -4(-1) = 4

E = -2k = -2(3) = -6

F = K^2 + 4ph = $(3)^2$ + 4(-1)(2) = 1

Por lo que al sustituirlos en la forma general $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Obtenemos la ecuación $y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

Nota: Este mismo resultado se puede obtener, a partir de la forma ordinaria, eliminando paréntesis e igualando la ecuación a cero.

4.3.2. Conversión de la forma general a la ordinaria.

Una manera de encontrar la ecuación canónica a partir de su forma general es empleando los conocimientos algebraicos adquiridos en el curso de matemáticas 1, acerca de como completar un T.C.P. (trinomio cuadrado perfecto). Así, volviendo al ejemplo anterior; tenemos que:

$$y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$$

$$y^2 - 6y = -4x - 1$$

$$y^2 - 6y + (9) = -4x - 1 + (9)$$

$$(y-3)^2 = -4x + 8$$

$(y-3)^2 = -4(x-2)$ Forma ordinaria de la ecuación

EJERCICIO 3

Determina la forma general de la ecuación de las parábolas:

1) $(x + 2)^2 = 4(-3)(y - 1)$
2) $(y - 5)^2 = 4(2)(x+3)$
3) $(x - 4)^2 = 20(y - 0)$
4) $(y + 2)^2 = 6(x + 7)$

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

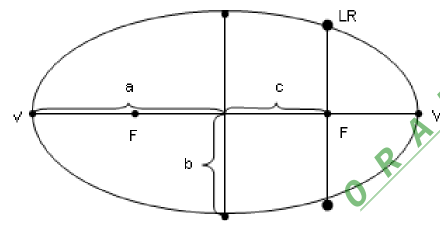
1) $y^2 - 8x - 3 = 0$
2) $x^2 - 2x - 4y + 13 = 0$
3) $y^2 - 10y - 16x + 169 = 0$
4) $x^2 - 8x + 12y - 144 = 0$
5) $x^2 - 2x - y + 1 = 0$

TAREA 2

Página 169.

4.4. OTRAS CÓNICAS

4.4.1. Elipse.



Es el lugar geométrico del conjunto de puntos en el plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos (FOCOS) es constante.

En donde:

a es igual a la distancia del centro al vértice del eje mayor.
b es igual a la distancia del centro al vértice del eje menor.
c es igual a la distancia del centro a cualquiera de los puntos fijos o focos.

Este lugar geométrico se puede comprobar experimentalmente empleando una cuerda sujeta a dos puntos fijos y un lápiz; el trazo corresponderá a una elipse.

Para saber más y enriquecer el tema de cómo trazar una elipse, visita el sitio www.tododibujo.com

Elementos de la Elipse

Eje mayor es la recta donde se localizan los vértices y los focos.
La longitud del eje mayor se define como dos veces la distancia del centro al vértice (2 a).

Eje menor es la recta que no contiene al foco ni al vértice.
La longitud del eje menor se define como dos veces la distancia del centro hacia cualquiera de los puntos del vértice del eje menor (2b).

Centro es un punto del eje mayor, y está situado a la mitad de los vértices.

Vértice puntos donde toca la elipse al eje mayor.

Lado recto es un segmento de recta perpendicular al eje y que pasa por los focos y tiene como extremos los lados de la elipse y su longitud es:

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad es el cociente de la distancia entre los focos a la distancia entre los vértices; está sólo se encuentra entre cero y uno.

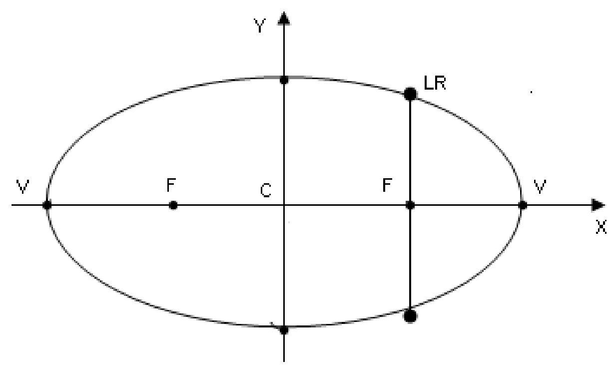
$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad determina la forma de la elipse, entre más cerca de uno se encuentre, la forma de la elipse será alargada, y si, por el contrario más cerca de cero está, su forma es más redonda.

Ecuaciones con centro en el origen

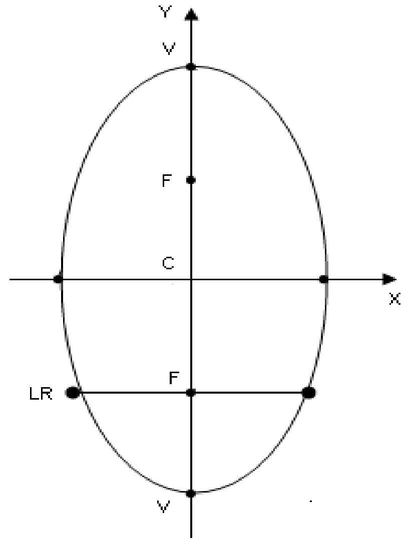
Gráfica No.1	Gráfica No.2	Ecuación General
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$AX^2 + BY^2 + F = 0$

Gráfica No. 1



Centro	Vértices	Focos	Excentricidad
(0, 0)	$(\pm a, o)$	$(\pm c, o)$	$e = \dfrac{c}{a}$

Gráfica No. 2

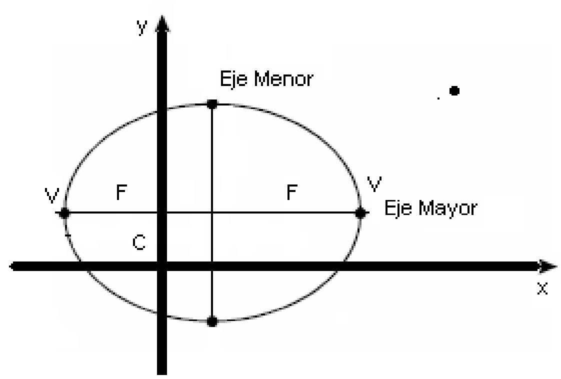


Centro	Vértices	Focos	Excentricidad
$(0,0)$	$(0, \pm a)$	$(0, \pm c)$	$e = \dfrac{c}{a}$

Ecuaciones con centro (h, k) fuera del origen

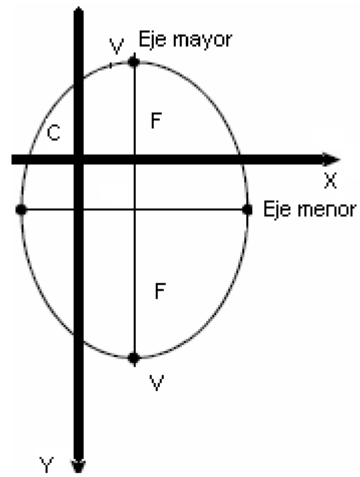
Gráfica No.1	Gráfica No.2	Ecuación General
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$Ax^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$

Gráfica No. 1



Vértice	Centro	Focos	Excentricidad
V$(h \pm a,\, k)$	(h,k)	$F(h \pm c,\, k)$	$e = \dfrac{c}{a}$

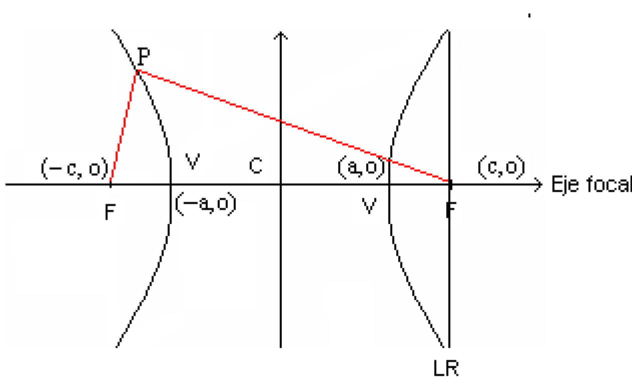
Gráfica No. 2



Vértice	Centro	Focos	Excentricidad
$(h, k \pm a)$	(h,k)	$F(h, k \pm c)$	$e = \dfrac{c}{a}$

4.4.2 Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos (FOCOS) fijos es constante.



Elementos de la Hipérbola

Focos son los puntos fijos.

Eje focal es la recta que pasa por los focos.

Vértice es punto medio entre los focos y el centro.

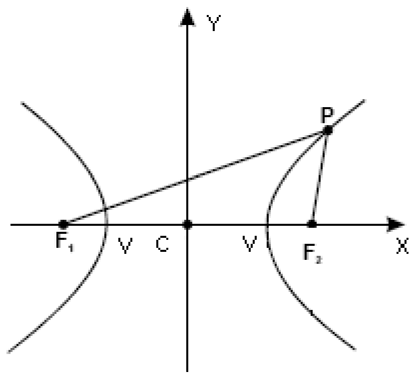
Lado recto es la recta perpendicular al eje de la hipérbola y pasa por los Focos.

Centro es mitad de la distancia entre los vértices.

Ecuaciones con centro en el origen $(0,0)$

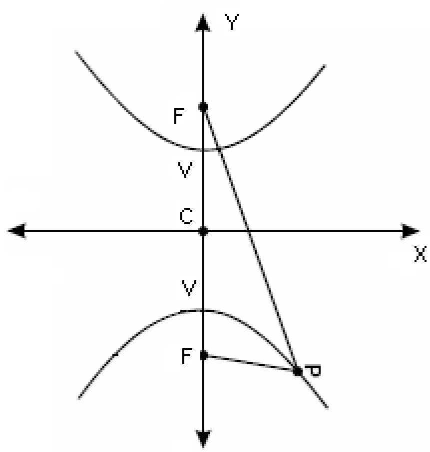
Gráfica No.1	Gráfica No.2	Ecuación General
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$Ax^2+By^2+F=0$

Gráfica 1



Centro	Vértices	Focos
$(0,0)$	$(\pm\, a,\, 0)$	$(\pm\, c,\, 0)$

Gráfica 2

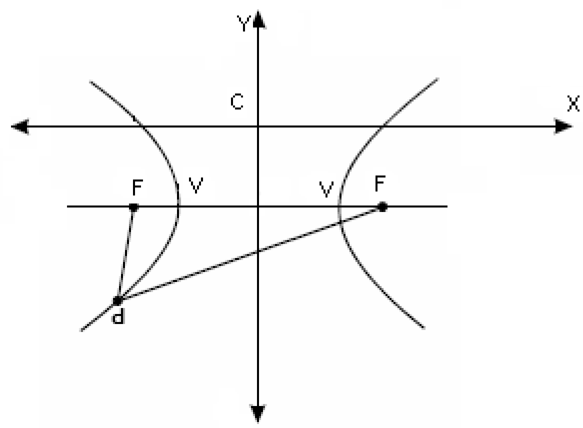


Centro	Vértices	Focos
$(0,0)$	$(0,\, \pm\, a)$	$(0,\, \pm\, c)$

Ecuaciones con centro (h,k) fuera del origen

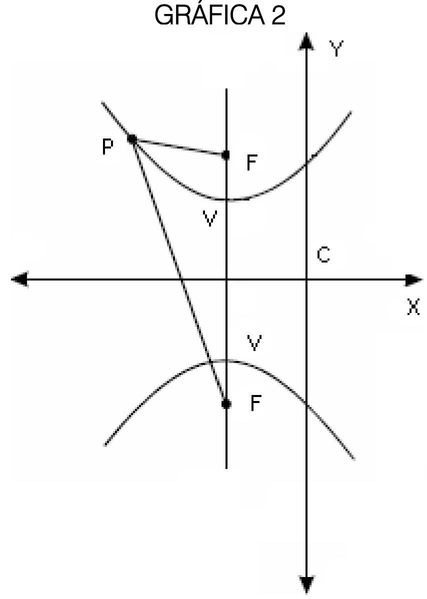
Gráfica No.1	Gráfica No.2	Ecuación General
$\frac{(x-h^2)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

GRÁFICA 1



Centro	Vértices	Focos
(h,k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$

GRÁFICA 2



Centro	Vértices	Focos
(h,k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

EJERCICIO 4

INSTRUCCIONES:

I. En binas realicen la construcción del lugar geométrico de los puntos de una elipse utilizando regla y compás. Presenten el trabajo a su profesor.

II. Identifiquen que gráfica representa cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $x^2 + y^2 = 25$	2) $y^2 - 20x = 0$
3) $x + 2y = 0$	4) $4x^2 + y^2 = 4$
5) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$	6) $2y - 10 = 0$
7) $2x^2 + 2y^2 - 8 = 0$	8) $y = 2x^2$
9) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$	10) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$

Visita el sitio
http://dinamica1.fciencias.unam.mx/preparatoria8/conicas/index.html

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.

TAREA 1

Nombre____

No. de lista ________________ Grupo ___________________________

Turno__________________________________ Fecha _______________

INSTRUCCIONES: Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios y realiza la gráfica correspondiente y preséntaselos a tu profesor para su revisión.

I. Obtén todos los elementos (V, F, D, L.L.R.)

1) $y^2 = -16x$

2) $x^2 + 5y = 0$

3) $y^2 + 2x = 0$

4) $x^2 - 12y = 0$

5) $2y^2 - 16x = 0$

6) $4x^2 + 10y = 0$

II. *Obtén la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas.*

1) Tiene su foco en (3, 0) y su directriz es $x + 3 = 0$.

2) Tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es $4y - 7 = 0$.

3) Tiene su vértice en el origen y su foco en F(0, 4).

4) Tiene su vértice en el origen, abre hacia la izquierda y L.L.R. = 10.

5) Abre hacia arriba y su lado recto tiene por extremos los puntos L(-3, 2) y R(3, 2).

6) Tiene su vértice en el origen, su eje focal sobre el eje “X” y pasa por el punto P(4, -4).

7) Tiene su vértice en el origen, su eje focal sobre el eje “Y” y pasa por el punto Q(-4, -2).

III. Indica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):

1) Si en una parábola $p = 3$, la longitud de su lado recto es 6. ( )

2) La parábola $y^2 + 8x = 0$ es horizontal y abre hacia la izquierda. ( )

3) El foco de una parábola está entre su vértice y la directriz. ( )

4) Cuando la distancia de V a D en una parábola es 5, su lado recto mide 20. ( )

5) La parábola $x^2 = 8y$ pasa por el punto A(7,7). ( )

6) La parábola $y^2 + 16x = 0$ pasa por el punto P(-4, -8). ( )

7) El foco de la parábola $2x^2 - 8y = 0$ es el punto F(0, 1). ( )

8) La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = 6x$ es $2x + 3 = 0$. ( )

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre____

No. de lista ______________ Grupo ____________________

Turno__________________________ Fecha ______________

INSTRUCCIONES: Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios y realiza la gráfica correspondiente y preséntaselos a tu profesor para su revisión.

I. *Obtén la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas.*

1) Tiene vértice en V (-4, 3) y foco en F(-2, 3).
2) Tiene su vértice en V (-2, 3) y su foco en F(-3, 3).
3) Tiene Foco en F(6, -2) y directriz la recta cuya ecuación es $y - 4 = 0$.
4) Tiene su vértice en V(0, -2) y directriz la recta $y + 1 = 0$.
5) Tiene vértice en el punto (2, 3), eje focal paralelo al eje "Y" y pase por el punto B (4, 4).
6) Tiene su vértice en V(1, -2), eje focal paralelo a "X" y pasa por el ponto P(5,2).
7) Tiene por lado recto la recta que une A(-2, 2) con B(-2, -4) y abre hacia la derecha.
8) Tiene por lado recto la recta que une L(-1,1) con R(7,1) y abre hacia abajo.
9) Tiene eje paralelo al eje "Y" y pase por los puntos A(4, 5), B(-2, 11) y C(-4, 21).
10) Tiene eje paralelo al eje "X" y pasa por los puntos P(2, 7), Q(2, 5) y R(1, 6).

II. *Cada una de las ecuaciones descritas a continuación corresponde a parábolas. Localiza el vértice, el foco, la ecuación de la directriz, y entrega un reporte a tu profesor:*

a) $y^2 + 4x - 4y - 20 = 0$

b) $y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$

c) $y^2 + 4x + 4y = 0$

d) $4y^2 + 24x + 12y - 39 = 0$

e) $8y^2 + 22x - 24y - 128 = 0$

f) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$

g) $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

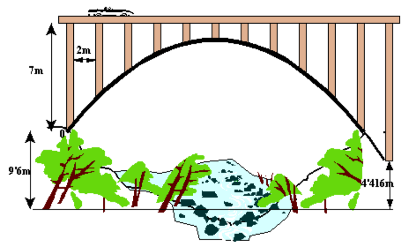
h) $x^2 - 8x + 3y + 10 = 0$

i) $6x^2 - 8x + 6y + 1 = 0$

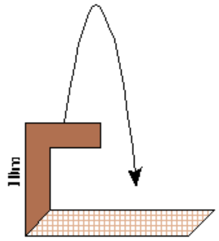
j) $5x^2 - 40x + 4y + 84 = 0$

III. Resuelve el siguiente problema.

1) Calcula la longitud de los pilares (separados entre sí 2 m) de este puente sabiendo que el arco que lo sustenta es parabólico. (Nota: Situar el eje de coordenadas en el lugar señalado con la 0).



2) Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 14'7 m/s desde el punto A situado a 10 m del suelo. Su altura en cada instante está dada por la ecuación $y = 4.9t^2 + 147t + 10$, y su velocidad en el instante t, por - 9'8 t + 14'7.
   a. ¿En qué instante la altura es máxima?
   b. ¿Cuál será la velocidad del objeto en ese momento?
   c. ¿En qué instante caerá al suelo?



AUTOEVALUACIÓN

Nombre ______________________________

No. de lista ____________ Grupo ______________

Turno __________________ Fecha ____________

INSTRUCCIONES: De acuerdo a lo visto en clase contesta las siguientes preguntas, eligiendo la respuesta correcta, rellenando totalmente el círculo que corresponda:

1) Las ramas de la parábola van hacia arriba y hacia la derecha cuando el valor de:

Ⓐ x=0
Ⓑ p>0
Ⓒ y=0
Ⓓ p<0

2.. En la parábola cuya directriz es la recta y=-1 y cuyo foco es el punto F(0,1). ¿Dónde se ubica el vértice?

Ⓐ V (0, -1)
Ⓑ V (0, 1)
Ⓒ V (0, 0)
Ⓓ V (3, 5)

3) Usando la definicion, ¿Cuál es la ecuacion de la parábola que tiene su foco en (2, 0) y su directriz es la ecuacion x = -2

Ⓐ $y^2 = 8x$
Ⓑ $y^2 = 4x$
Ⓒ $x^2 = -8x$
Ⓓ $x^2 = -4x$

4) $x^2 = -6y$, representa la ecuación de una parábola, las coordenadas del foco, y la ecuación de la directriz son:

Ⓐ F (0, 0) directriz Y = 6
Ⓑ $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ directriz $y = \frac{1}{2}$
Ⓒ F (3, 2) directriz Y = 2
Ⓓ $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ directriz $y = \frac{3}{2}$

5) La ecuación que representa una parábola con vértice en el origen es:

Ⓐ $\frac{(x-h^2)}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
Ⓑ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Ⓒ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
Ⓓ $y^2 = 4px$

6. Una parábola que abre hacia la derecha, ¿Cuál es la variable que está elevada al cuadrado?

Ⓐ La variable X
Ⓑ La variable y
Ⓒ Ambas Variables
Ⓓ Ninguna de las variables

7. La distancia que existe entre el vértice y el foco de la parábola cuya ecuación es $(x-5)^2 = 16(y-9)$ es :

Ⓐ 16
Ⓑ 4
Ⓒ 8
Ⓓ 1

8. La ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $(y-1)^2 = -12(x+4)$ es:

Ⓐ $x + 1 = 0$
Ⓑ $y + 1 = 0$
Ⓒ $x - 1 = 0$
Ⓓ $y - 1 = 0$

9) Las coordenadas del foco de la parábola cuya ecuación general está dada por $y^2 - 2y - 6x + 13 = 0$ es:

Ⓐ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
Ⓑ $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$
Ⓒ $\left(1, \frac{7}{2}\right)$
Ⓓ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

10. La ecuación general de una parábola es $y^2 - 8x - 10y + 17 = 0$
La longitud del lado recto es:

Ⓐ 2
Ⓑ 4
Ⓒ 10
Ⓓ 8

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: ***excelente,*** por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es *bueno*, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es *insuficiente*, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

Consulta las claves de respuestas en la página 175.

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre____

No. de lista _______________ Grupo ___________________________

Turno_________________________________ Fecha _______________

INSTRUCCIONES: Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios y realiza la gráfica correspondiente y preséntaselos a tu profesor para su revisión.

I. Encuentra la ecuación de la parábola que cumple las siguientes condiciones:

1) V(0,0) y F(-3,0).
2) V(0,0) y F(0, 4).
3) V(2, 8) y F(5, 8).
4) V(-3, -5) y F(-3, -9).
5) F(4, 6) y ecuación de la directriz X + 6 = 0.
6) F(0, 6) y directriz el eje X.
7) Lado recto, el segmento de recta que une los puntos (2, -4) y (2, 6).
8) Eje paralelo al eje X y que pase por los puntos (3, 3), (6, 5) y (6, -3).
9) V(7, 3), a = -5 (izquierda).
10) V(2, 3) L.L.R = 16 y con ramas hacia arriba.
11) Lado recto el segmento de recta que une los puntos (-1, 5) y (11, 5).
12) Vértice el origen y foco el punto (0, -7/2).
13) V(3, 0) y ecuación de la directriz y + 3 = 0.
14) F(2, 3) y ecuación de la directriz x – 4 = 0.
15) las condiciones que tu elijas.

II. Encuentra los elementos de la parábola cuyas ecuaciones generales están dadas por:

$$y^2 - 6x + 8y + 4 = 0$$

$$x^2 + 12y - 24 = 0$$

$$y^2 - 8x = 0$$

$$x^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - 32x = 0$$

$$x^2 - 6y = 0$$

$$x^2 + 8x + 6y + 34 = 0$$

$$2x^2 + 16x - 3y + 29 = 0$$

$$y^2 + 10y - 3x + 28 = 0$$

$$x^2 - 2x - y - 4 = 0$$

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

Claves de Respuestas

UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4
1. d	1. c	1. c	1.b
2. b	2. a	2. b	2.c
3. a	3. b	3. d	3.a
4. c	4. a	4. a	4.d
5. b	5. b	5. c	5d
6. d	6. a	6. a	6.b
7. a	7. c	7. d	7.b
8. c	8. a	8. c	8.a
9. c	9. b	9. b	9.b
10. a	10. a	10. d	10. d

Glosario

Ángulo. Abertura comprendida en el cruce de dos rectas.

Base. Un número utilizado varias veces como factor.

Binomio. Una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos.

Bisectriz. Recta que divide en dos partes iguales a una figura.

Baricentro. Punto de cruce de las medianas en un triángulo.

Circunferencia. Conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Coeficiente (numérico). El número que aparece como factor en una expresión.

Cónicas. Curvas generadas por los cortes de un plano a un cono.

Conjunto solución. El conjunto de números que hacen verdadera una proposición.

Constante. Un símbolo cuyo valor no cambia en un problema determinado.

Coordenadas. La abscisa "x" y la ordenada "y" de un punto (x,y) en un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.

Cuadrado. La palabra usada para representar el resultado de elevar un número o un polinomio a la segunda potencia.

Cuadrado perfecto. Un entero que es el cuadrado de otro entero o un polinomio que es el cuadrado de otro polinomio.

Cubo. La palabra que designa el resultado de elevar un número o un polinomio a la tercera potencia.

Denominador. Es la parte de la fracción que nos indica las partes iguales en los que se divide la unidad.

Diferencia. Es el resultado de quitar al minuendo del sustraendo.

Dígito. Cualquiera de los diez números 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9.

Directriz. Recta a la cuál guardan la misma distancia que al foco los puntos de una parábola.

Discriminante. El valor de la expresión $b^2 - 4ac$ en donde *a, b* y *c* son los coeficientes de una ecuación de segundo grado.

Ecuación. Una proposición que establece que dos expresiones, de las cuales por lo menos una contiene una incógnita, son iguales.

Ecuación cuadrática completa. Se da siempre que los coeficientes de la incógnita y el término independiente sean diferentes de cero.

Ecuación cuadrática incompleta. Es cuando el coeficiente del término lineal y del independiente son cero o al menos uno de ellos es igual a cero.

Ecuaciones consistentes. Un sistema de *n* ecuaciones de primer grado con *n* incógnitas que tiene solución única.

Ecuación cuadrática (segundo grado). Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde *a, b y c* son números reales y a $a \neq 0$.

Ecuación de primer grado con una incógnita. Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, la incógnita aparece a la primera potencia.

Ecuaciones dependientes. Un sistema de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas que tiene un número infinito de soluciones. Están relacionadas de tal forma que una puede obtenerse de la otra mediante la multiplicación de cada término por una constante adecuada.

Ecuaciones equivalentes. Dos ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Ecuaciones inconsistentes. Un sistema de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas que no tienen solución común (solución nula).

Elipse. Lugar geométrico de los puntos cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre una constante.

Exponente. El número escrito arriba y a la derecha de otro número (base) que indica el número de veces que la base se toma como factor en un producto.

Expresión. Un número, o letra, o una combinación de ambos obtenida mediante operaciones algebraicas.

Expresión aritmética. Es la combinación de números y operaciones básicas

Factor. Un divisor exacto de una expresión.

Factor común. Un número o expresión algebraica que es factor de dos o más términos.

Factores primos. Son números primos que dividen a un número compuesto.

Factorizar. Descomponer una expresión en sus factores.

Fórmula general. La expresión algebraica que sirve para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita fórmula que se utiliza para encontrar las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Fracción. El cociente indicado de dos números o expresiones; si la fracción es x/y, “x” se llama el numerador y “y” el denominador.

Fracción compleja. Una fracción que contiene fracciones en su numerador, en su denominador o en ambos.

Fracción impropia. Cuando en una fracción el numerador es mayor que el denominador.

Fracción mixta. Fracción que se escribe como parte entera más una fracción. Se compone de parte entera y parte fracción (fracción propia).

Fracción propia. Es cuando en una fracción el numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Fracciones que representan el mismo valor, aunque tanto el numerador como el denominador sean diferentes.

Función. Es la relación entre dos conjuntos de pares ordenados, con la propiedad de que a cada elemento del primer conjunto llamado dominio le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto llamado rango o imagen .

Gráfica (de una ecuación). Lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Hipérbola. Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

Línea recta. Sucesión infinita de puntos en una misma dirección.

Lugar Geométrico. Conjunto de puntos que satisfacen una condición.

Medianas (en un triángulo). Recta que parte del vértice al punto medio del lado opuesto.

Mediatriz. Recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

Minuendo. Es la cantidad mayor en la operación de sustracción.

Monomio. Expresión que contiene un término.

Numerador. Es la parte de la fracción que nos indica la cantidad que se toma de la unidad.

Número compuesto. Son los que se pueden descomponer en factores primos

Número entero. Todo elemento del conjunto {...,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,...}.

Número racional: Son números de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y b es diferente de cero, además tienen expansión decimal finita o periódica infinita.

Número irracional. Es aquél que no puede expresarse como el cociente de dos enteros.

Número natural. Todo elemento del conjunto {1,2,3,4,5,6,....}

Número primo. Entero positivo mayor que uno que no tiene más divisores que el mismo y la unidad.

Número racional. Es aquél que puede expresarse como el cociente de dos enteros (fracción).

Números reales. El conjunto de números que comprende a todos los números racionales y a todos los números irracionales.

Origen. Punto de referencia O(0,0) en un sistema de coordenadas.

Parábola. Lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a una recta llamada directriz y a un punto fijo llamado foco son siempre iguales.

Paralelogramo. Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Pendiente. Es el cociente de los incrementos en “y” entre los incrementos en “x”.

Polinomio. Expresión que contiene más de un término.

Proporción. La proposición que expresa la igualdad de dos razones.

Raíz de una ecuación. Un valor de la incógnita que satisface la ecuación.

Razón. Relación que existe entre dos cantidades. La división indicada de una cantidad entre otra.

Recíproco. Un número es el recíproco de otro si el producto de ambos es 1.

Segmento de recta. Porción de recta con un punto inicial y un punto final.

Sustracción. Es cuando se compara el minuendo y el sustraendo.

Sustraendo. Es la cantidad menor en la operación de sustracción.

Término. Una expresión que consta de un número, letra o de una combinación de ambos empleando sólo las operaciones de multiplicación y división.

Trinomio cuadrado perfecto. Es el resultado de elevar un binomio al cuadrado.

Variable. Un símbolo que representa a cualquiera de los elementos de un conjunto de números, cuyo valor puede cambiar.

Bibliografía General

- SALAZAR Vásquez Pedro y MAGAÑA Cuellar Luís. *Matemáticas 3.* Editorial Nueva Imagen, México 2005.
- RUIZ Basto, Joaquín. *Geometría Analítica Básica*. Publicación Cultural. México, 2005.
- LEHMANN H. Charles. *Geometría Analítica* Editorial Limusa, México, 1994 Vigésima Impresión